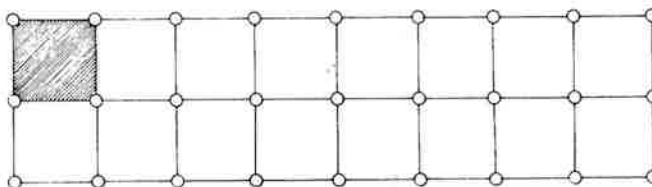
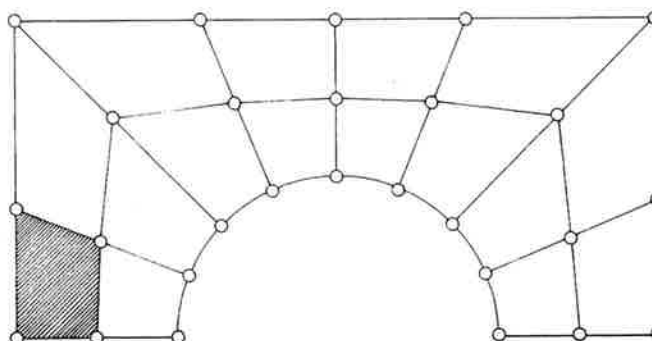




PLATON



DEMOCRITO



METODOS DE ANALISIS EN TEORIA DE LA ELASTICIDAD

INTRODUCCION

NOTACION:

Escalar: a
Vector : $\{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
Matriz : $\{a\} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ \{a_1\} & \\ 1 & n \\ \{a_2\} & \\ \vdots & \\ 1 & n \\ \{a_m\} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Cuando no hay ambigüedad se suprimen los superíndices que indican las dimensiones de la matriz.

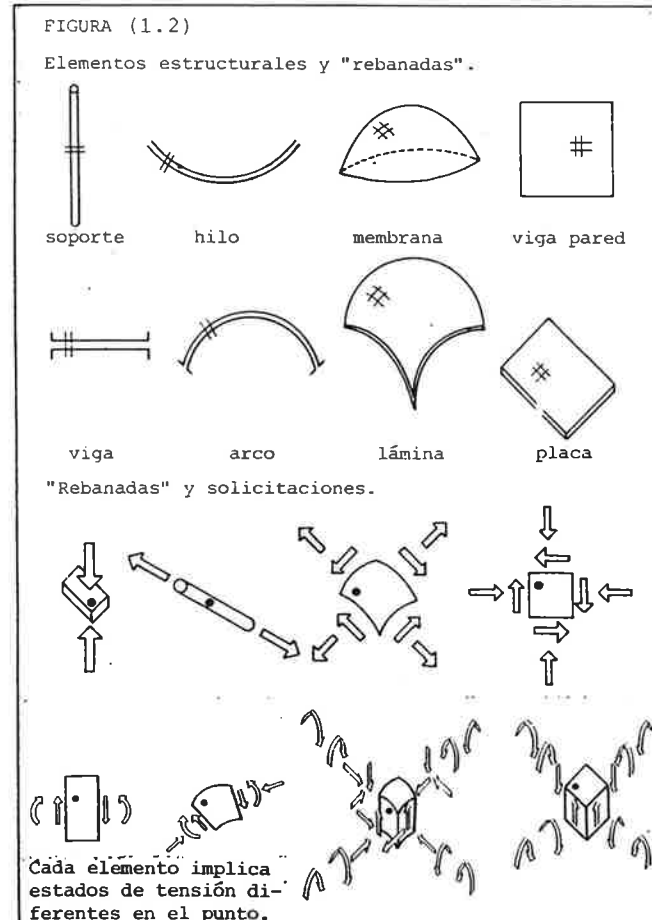
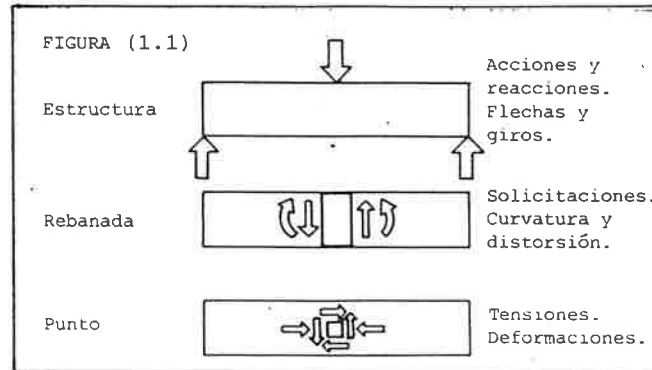
Así: $\{\tau\}$ Es el tensor de tensiones (3x3)
 $\{\tau_x\}$ Es el vector tensión en un plano de versor OX (1x3)
 τ_{xx} Es la componente normal de la tensión en el plano de versor OX . (El primer subíndice designa el plano y el segundo la dirección).
 Traza de $\{\tau\} = \{\bar{\tau}\}$ Es la suma de la diagonal principal de la matriz.

INTRODUCCION.

Este texto recoge parte de las enseñanzas del curso de Cálculo de Estructuras III de la E.T.S.A.M., y es el resultado de un curso impartido por el autor y el profesor Ignacio Jaenicke, a quien se debe la notación utilizada.

Cada hoja del texto consta de tres columnas. La derecha permite seguir el hilo del razonamiento, apoyándose en las figuras de la columna central. Los desarrollos matemáticos se sitúan, finalmente, en la columna de la izquierda.

TENSION, EQUILIBRIO



1.0 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.

Toda estructura sometida a un sistema de fuerzas en equilibrio es susceptible de ser analizada desde dos puntos de vista:

-Por un lado pueden estudiarse los esfuerzos a que se halla sometida.

-Por otro lado pueden analizarse los movimientos de la misma.

Según sea el nivel del análisis (estructura, rebanada o punto), la denominación de esfuerzos y movimientos puede ser la de la figura (1.1).

En cualquier caso, el objetivo es limitar razonadamente los esfuerzos y los movimientos a que puede ser sometida la estructura (o parte de ella).

El único nivel de análisis que permite una amplia generalización para elementos estructurales de todo tipo es el que parte del estudio del comportamiento de cada punto de la estructura.

El análisis de elementos mayores (rebanadas trozos, etc.), útil para el estudio de estructuras isostáticas o para casos de estructuras lineales, no es suficientemente general.

$$\{\tau_\alpha\} = \delta\{F_\alpha\} / \delta A_\alpha = \text{Fuerza} / \text{Superficie}$$

Siendo $\tau_{\alpha x}, \tau_{\alpha y}, \tau_{\alpha z}$, las componentes de la tensión en un plano α (definido por su versor), es decir :

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha x} &= |\tau_\alpha| \cos \alpha_x \\ \tau_{\alpha y} &= |\tau_\alpha| \cos \alpha_y \\ \tau_{\alpha z} &= |\tau_\alpha| \cos \alpha_z\end{aligned}$$

se puede poner, en forma vectorial

$$\vec{\tau}_\alpha = \tau_{\alpha x} \vec{i} + \tau_{\alpha y} \vec{j} + \tau_{\alpha z} \vec{k}$$

y, en forma matricial

$$\{\tau_\alpha\} = \{\tau_{\alpha x} \quad \tau_{\alpha y} \quad \tau_{\alpha z}\}$$

Por tanto :

$$\vec{\tau}_x = \tau_{xx} \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \equiv \{\tau_x\}$$

$\{\tau_x\}$ = Tensión que actúa en la cara X

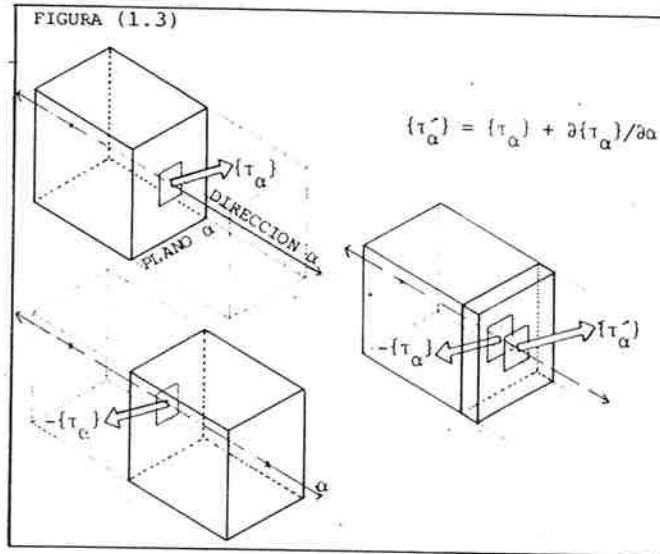
τ_{xy} = Componente de la tensión $\{\tau_x\}$ en la dirección OY

ESTADO DE TENSION EN EJES O;X,Y,Z

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ \{\tau\} & = \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \{\tau_x\} \\ 1 & 3 \\ \{\tau_y\} \\ 1 & 3 \\ \{\tau_z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

En muchos textos $\tau_{xx} = \sigma_x$; $\tau_{yy} = \sigma_y$; $\tau_{zz} = \sigma_z$

* dx, dy, dz, pueden ser lo pequeños que queramos y al darles el valor de la unidad de longitud no se altera su carácter infinitesimal, ya que la unidad de longitud puede ser elegida también tan pequeña como sea preciso.



1.1 ESTADO DE TENSION.

Dada una superficie y una fuerza que actúa distribuida sobre la misma, se denomina tensión a la fuerza que se ejerce sobre cada unidad de superficie.

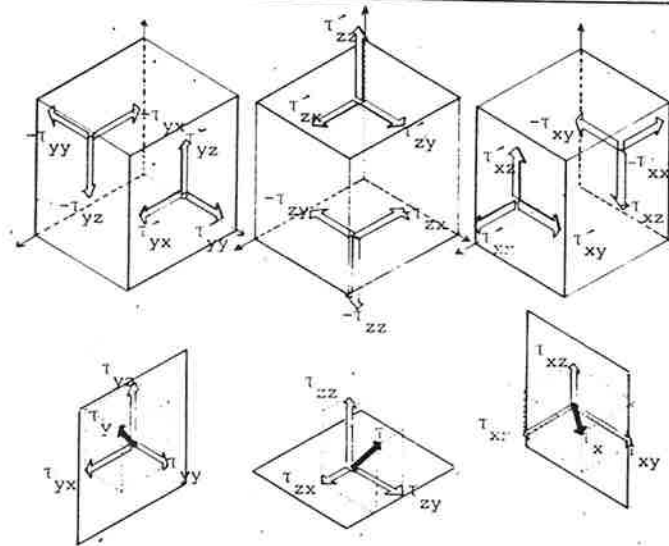
Definidos unos ejes coordenados X,Y,Z, una tensión consta de tres componentes según dichas direcciones y su sentido depende de la cara de la superficie sobre la que medimos la fuerza, como podemos ver en la fig.(1.3).

Si observamos las tensiones ejercidas sobre planos paralelos infinitamente próximos y admitimos que las tensiones sólo varían gradualmente, su valor se mantendrá constante salvo una variación infinitesimal.

Para estudiar los esfuerzos a que se halla sometido un punto (su ESTADO de TENSION) podemos evaluar las tensiones ejercidas sobre las caras de un elemento cúbico infinitesimal de caras paralelas a los planos coordenados con centro en el punto.

Si las aristas miden la unidad * la fuerza sobre cada cara será directamente la tensión.

"El ESTADO de TENSION en un punto puede, pues, expresarse como una matriz cuyas filas son las tensiones de cada cara y cuyas columnas corresponden a las respectivas componentes paralelas a los ejes X,Y,Z."



$$\begin{aligned}\tau'_{yx} &= \tau_{yx} + \partial \tau_{yx} / \partial y & \tau'_{zx} &= \tau_{zx} + \partial \tau_{zx} / \partial z & \tau'_{xx} &= \tau_{xx} + \partial \tau_{xx} / \partial x \\ \tau'_{yy} &= \tau_{yy} + \partial \tau_{yy} / \partial y & \tau'_{zy} &= \tau_{zy} + \partial \tau_{zy} / \partial z & \tau'_{xy} &= \tau_{xy} + \partial \tau_{xy} / \partial x \\ \tau'_{yz} &= \tau_{yz} + \partial \tau_{yz} / \partial y & \tau'_{zz} &= \tau_{zz} + \partial \tau_{zz} / \partial z & \tau'_{xz} &= \tau_{xz} + \partial \tau_{xz} / \partial x\end{aligned}$$

Lado del cubo igual a la unidad.

Se desprecian las variaciones infinitesimales de segundo o mayor orden.

* Tomando momentos alrededor del eje Z queda:

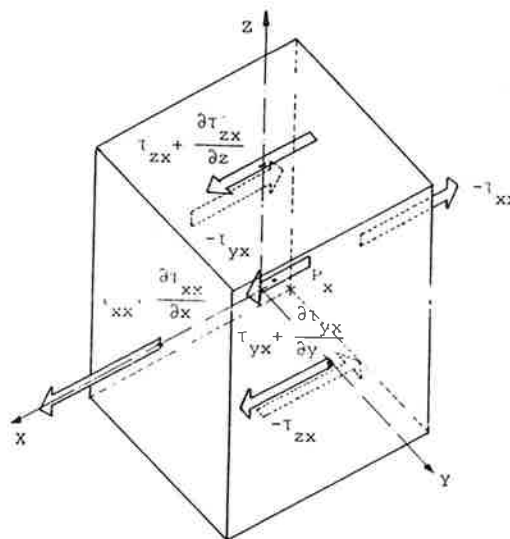
$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

puesto que todas las fuerzas concurren en el eje Z salvo las citadas, que forman, despreciando infinitésimos de 2º orden, dos pares que han de ser iguales y contrarios para que exista el equilibrio.

De la misma manera ;

$$\begin{aligned} \tau_{xy} - \tau_{yx} &= 0 \\ \tau_{xz} - \tau_{zx} &= 0 \\ \tau_{yz} - \tau_{zy} &= 0 \end{aligned} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Por tanto, la matriz que expresa el estado de tensión es simétrica respecto de la diagonal principal,



1.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

Equilibrando momentos alrededor de cada eje se comprueba que las tensiones tangenciales que se dirigen a la misma arista son iguales. *

1.2.1 ECUACIONES DEL EQUILIBRIO ELEMENTAL.

Si analizamos el equilibrio de fuerzas ** para el elemento cúbico y llamamos $\{\rho\}$ a la fuerza ejercida por unidad de masa (el peso específico, las fuerzas de inercia etc) pueden establecerse 3 ecuaciones de equilibrio, una para cada eje coordenado

$$\{\nabla\}\{\tau\} + \{\rho\} = \{0\} \quad (1.1)$$

** Equilibrando en la dirección X:

$$-\tau_{xx} + (\tau_{xx} + \partial\tau_{xx}/\partial x) - \tau_{yx} + (\tau_{yx} + \partial\tau_{yx}/\partial y) - \tau_{zx} + (\tau_{zx} + \partial\tau_{zx}/\partial z) + \rho_x = 0$$

$$\text{Es decir: } \partial\tau_{xx}/\partial x + \partial\tau_{yx}/\partial y + \partial\tau_{zx}/\partial z + \rho_x = 0$$

$$\text{Análogamente: } \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\tau_{yy}/\partial y + \partial\tau_{zy}/\partial z + \rho_y = 0$$

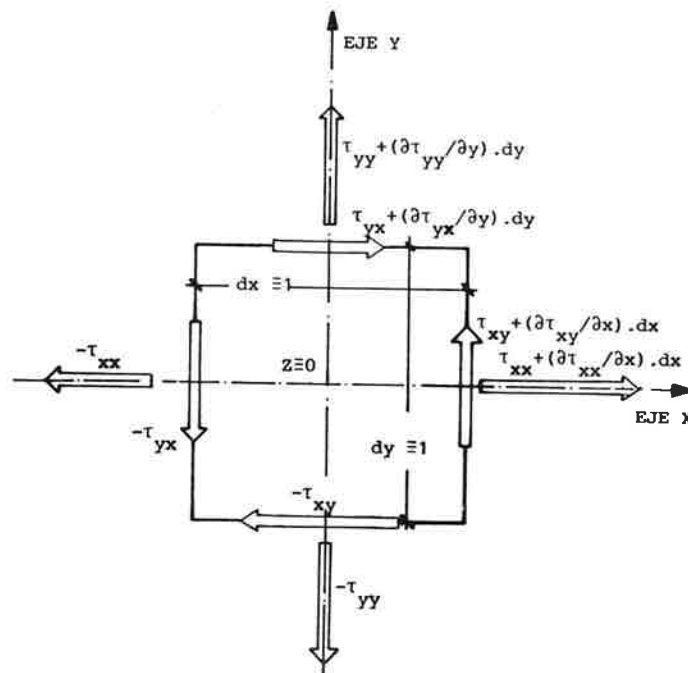
$$\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\tau_{zz}/\partial z + \rho_z = 0$$

$$\text{Si } \{\nabla\} = \{\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z\}$$

Las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse

en la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$



ESTADO PLANO DE TENSION.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{puede escribirse} \quad \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix}$$

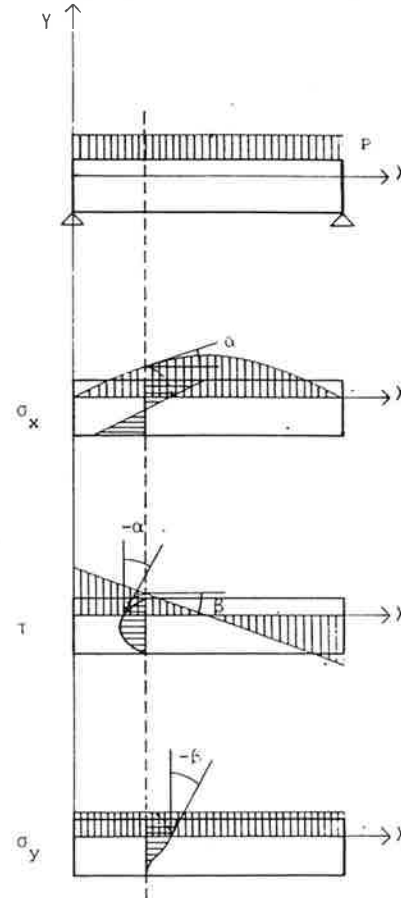
Si no hay fuerzas de masa para un estado plano nos queda:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

FIGURA (1.6)

Las ecuaciones de equilibrio implican una relación entre las tensiones.



1.3 ESTADO PLANO DE TENSION.

Se denomina así al estado de tensión en el que no existen esfuerzos en uno de los planos coordenados (p.ej. el eje Z).

Las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse idénticamente a las {1.1} considerando sólo las componentes de tensión y fuerza correspondientes al plano XY.

Puesto que el número de ecuaciones {1.1} es menor que el número de componentes de tensión (3 ecuaciones para 6 componentes), la solución no puede hallarse sólo por equilibrio:

El problema de hallar el estado de tensión en todo punto de una estructura es, por tanto, hiperestático. Será necesario considerar, además de las ecuaciones de equilibrio, las que resulten del estudio de las deformaciones del punto.

TENSOR DE TENSIONES

* Plano ξ definido por $\{v_\xi\} = \{\alpha_{\xi x} \alpha_{\xi y} \alpha_{\xi z}\}$.

Sea A el área definida en el triedro por el plano ξ .

El área de las caras correspondientes a los planos coordenados son la proyección de A :

$$A_x = \alpha_{\xi x} \cdot A$$

$$A_y = \alpha_{\xi y} \cdot A$$

$$A_z = \alpha_{\xi z} \cdot A$$

Por equilibrio resulta:

$$A \cdot \{\tau_\xi\} = A_x \cdot \{\tau_x\} + A_y \cdot \{\tau_y\} + A_z \cdot \{\tau_z\}$$

es decir:

$$\{\tau_\xi\} = \alpha_{\xi x} \{\tau_x\} + \alpha_{\xi y} \{\tau_y\} + \alpha_{\xi z} \{\tau_z\}$$

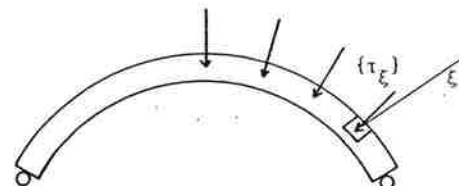
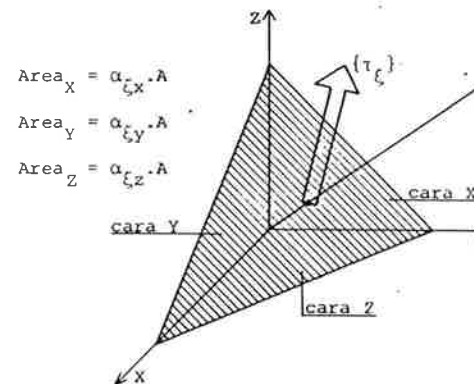
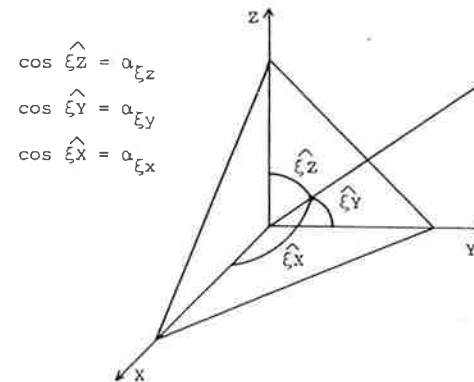
que puede escribirse:

$$\{\tau_\xi\} = \{v_\xi\} \cdot \{\tau\} \quad \{2.1\}$$

Expresión válida para cada punto del cuerpo, para todos los planos imaginables.

$\{\tau\}$ por tanto define el estado de tensión del punto.

FIGURA (2.1)



2.1 TENSION EN UN PLANO CUALQUIERA.

Sea un plano cualquiera en el entorno del punto cuyo estado de tensión analizamos.

El plano queda definido por los componentes de su versor (vector unitario normal al plano), o lo que es igual, por sus cosenos directores. $\{v_\xi\} = \{\alpha_{\xi x} \alpha_{\xi y} \alpha_{\xi z}\}$

Si aislamos un triedro definido por los planos coordenados y el plano considerado, las tensiones en éste quedan determinadas por las tres ecuaciones de equilibrio: *

$$\{\tau_\xi\} = \{v_\xi\} \{\tau\} \quad \{2.1\}$$

Por la ecuación {2.1}, a cada dirección $\{v_\xi\}$ se le hace corresponder la tensión sobre el plano normal a la misma ($\{\tau\}$ es el operador 'que define dicha correspondencia').

En una estructura cualquiera, la ecuación {2.1} será válida evidentemente si el plano ξ es, en los puntos de la superficie, tangente a la misma. En este caso $\{\tau_\xi\}$ es la tensión ejercida exteriormente sobre el cuerpo en ese punto.

Por ello también se utiliza {2.1} como ecuación de equilibrio en la superficie límite de la estructura.

* Sea el estado de tensiones $\{\tau\}_{xyz}$

Elegidos como nuevos ejes coordenados los ξ, η, ζ de versores $\{v_\xi\}, \{v_\eta\}, \{v_\zeta\}$; por la ecuación (2.1) puede escribirse la tensión en cada uno de los planos perpendiculares a dichos ejes:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \\ \tau_\zeta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \\ \tau_\zeta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ v_\eta & v_\eta & v_\eta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \\ \tau_\zeta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ v_\zeta & v_\zeta & v_\zeta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

y más abreviadamente:

$$\{\tau_{\xi\eta\zeta}\} = \{v_{\xi\eta\zeta}\} \cdot \{\tau\}$$

estando definidos todos los valores en ejes XYZ:

$$\{\tau_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} = \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} \cdot \{\tau\}_{xyz} \quad (i)$$

** Sabemos que las componentes de un vector (como por ejemplo $\{\tau_\xi\}$) en unos ejes son las proyecciones del vector sobre los mismos.

Puesto que la expresión de la proyección puede obtenerse como producto escalar del vector por el versor que define el eje,

$$\tau_{\xi\xi} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \tau_\xi & \tau_\xi & \tau_\xi \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ v_\xi \\ v_\xi \end{Bmatrix}^T; \tau_{\xi\eta} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \tau_\xi & \tau_\eta & \tau_\eta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ v_\xi \\ v_\eta \end{Bmatrix}^T; \tau_{\xi\zeta} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \tau_\xi & \tau_\zeta & \tau_\zeta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ v_\xi \\ v_\zeta \end{Bmatrix}^T$$

$$\text{es decir: } \begin{Bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \\ \tau_\zeta \end{Bmatrix}_{\xi\eta\zeta} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \tau_\xi & \tau_\eta & \tau_\zeta \end{Bmatrix}_{xyz} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{\xi\eta\zeta} \\ v_{\xi\eta\zeta} \end{Bmatrix}_{xyz}^T$$

$$\text{y } \begin{Bmatrix} \tau_\eta \\ \tau_\xi \\ \tau_\zeta \end{Bmatrix}_{\xi\eta\zeta} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \tau_\eta & \tau_\xi & \tau_\zeta \end{Bmatrix}_{xyz} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{\xi\eta\zeta} \\ v_{\xi\eta\zeta} \end{Bmatrix}_{xyz}^T$$

$$\text{análogamente: } \begin{Bmatrix} \tau_\zeta \\ \tau_\xi \\ \tau_\eta \end{Bmatrix}_{\xi\eta\zeta} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \tau_\zeta & \tau_\xi & \tau_\eta \end{Bmatrix}_{xyz} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ v_{\xi\eta\zeta} \\ v_{\xi\eta\zeta} \end{Bmatrix}_{xyz}^T$$

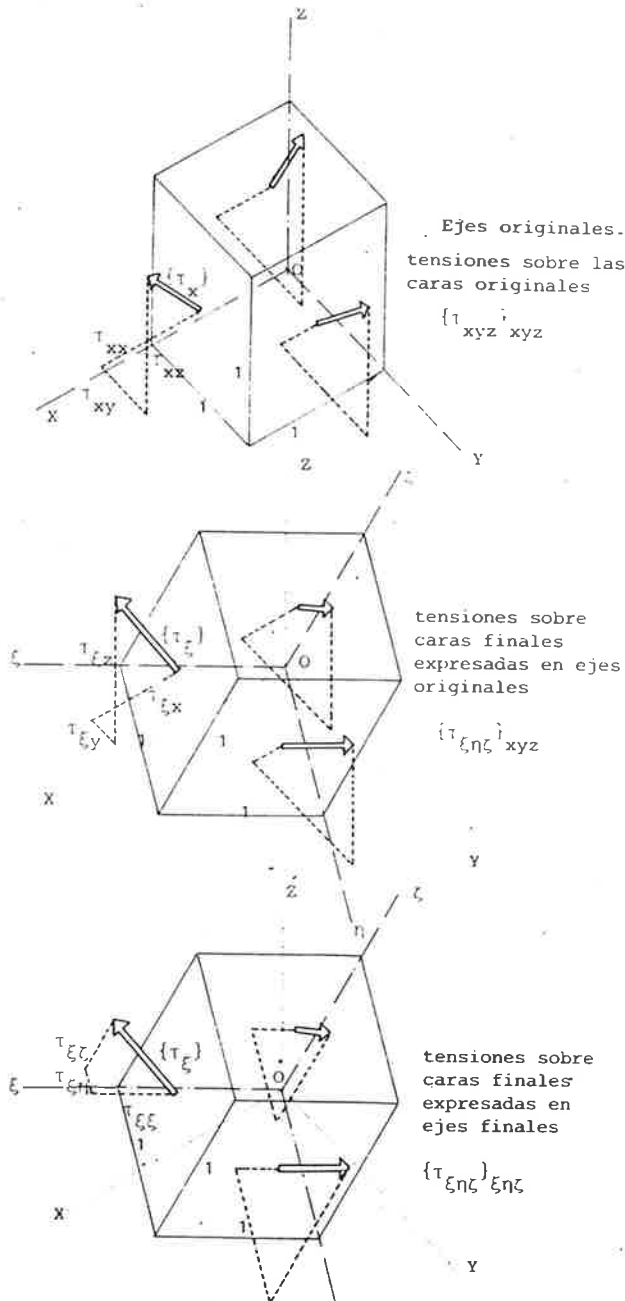
o abreviadamente:

$$\{\tau\}_{\xi\eta\zeta} = \{\tau_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} \cdot \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz}^T$$

$$\text{y por (i)} \quad \{\tau\}_{\xi\eta\zeta} = \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} \cdot \{\tau\}_{xyz} \cdot \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz}^T \quad (2.2)$$

$$\{\tau\}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \tau_{\xi\xi} & \tau_{\xi\eta} & \tau_{\xi\zeta} \\ \tau_{\eta\xi} & \tau_{\eta\eta} & \tau_{\eta\zeta} \\ \tau_{\zeta\xi} & \tau_{\zeta\eta} & \tau_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}; \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} = \begin{bmatrix} \alpha_{\xi x} & \alpha_{\xi y} & \alpha_{\xi z} \\ \alpha_{\eta x} & \alpha_{\eta y} & \alpha_{\eta z} \\ \alpha_{\zeta x} & \alpha_{\zeta y} & \alpha_{\zeta z} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{\xi x} = \cos(\angle \xi, ox), \text{ etc.}$$



2.2 CAMBIO DE EJES COORDENADOS.

Dado el estado de tensión definido en ejes X, Y, Z , ($\{\tau_{xyz}\}_{xyz}$) es importante poder expresarlo para unos ejes coordenados cualesquiera (ortogonales) diferentes de X, Y, Z .

Sean, por ejemplo, tres planos ortogonales ξ, η, ζ , definidos por sus versores correspondientes ($\{v_\xi\}, \{v_\eta\}, \{v_\zeta\}$), que constituirán un nuevo sistema de referencia:

1º Se obtienen por (2.1) las tensiones sobre las caras del cubo unidad ξ, η, ζ , medidas en los ejes coordenados antiguos. *

$$\{\tau_\xi\}_{xyz} \quad \{\tau_\eta\}_{xyz} \quad \{\tau_\zeta\}_{xyz}$$

$$\{\tau_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} = \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} \cdot \{\tau_{xyz}\}_{xyz}$$

2º Dichas tensiones se expresan como componentes correspondientes a los nuevos ejes proyectando, para cada cara, todas las componentes en los ejes primitivos sobre los nuevos. **

$$\{\tau_{\xi\eta\zeta}\}_{\xi\eta\zeta} = \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz} \cdot \{\tau_{xyz}\}_{xyz} \cdot \{v_{\xi\eta\zeta}\}_{xyz}^T$$

o, abreviadamente:

$$\{\tau\}' = \{v\} \cdot \{\tau\} \cdot \{v\}^T \quad (2.2)$$

Las propiedades de $\{\tau\}$ son las de un operador sobre vectores ((2.1)) cuyos cambios de ejes se definen por las ecuaciones (2.2), que son, como ya se sabe, las propiedades de un tensor.

$\{\tau\}$ ES EL "TENSOR DE TENSIONES"

$$* \quad \{\tau_{\xi}\}^3 = \sigma_{\xi} \{\nu_{\xi}\}^3$$

$$\{\tau_{\xi}\}^3 = \sigma_{\xi} \cdot \{\nu_{\xi}\}^3 \cdot \{I\}^3 \quad (\text{siendo } \{I\} \text{ la matriz identidad})$$

de {2.1}: $\{\nu_{\xi}\} \cdot \{\tau\} = \{\nu\}_{\xi} \cdot \sigma_{\xi} \cdot \{I\}$ y por lo tanto,

$$\{\nu_{\xi}\} \cdot (\{\tau\} - \sigma_{\xi} \cdot \{I\}) = \{0\} \quad \{2.3\}$$

Como el módulo de $\{\nu_{\xi}\}$ es la unidad (1), las ecuaciones anteriores {2.3} son ciertas sólo si se anula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ \{\tau\} - \sigma_{\xi} \cdot \{I\} \end{vmatrix} = 0 \quad \{2.4\}$$

Ecuación característica que ha de cumplirse para todas las direcciones principales.

Dicha ecuación (polinomio cúbico) tiene tres raíces. Distinguimos los siguientes casos:

a) Las tres raíces son distintas.

Para cada raíz σ_{ξ} , σ_{η} , σ_{ζ} puede obtenerse el versor correspondiente a su dirección por las ecuaciones {2.3}.

Se trata de tres direcciones principales ortogonales entre sí.

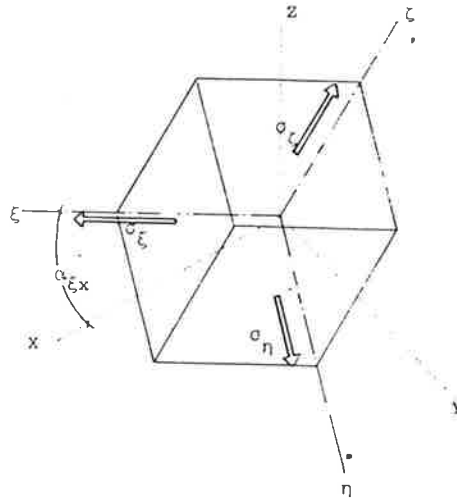
b) Existe una raíz doble.

Para la raíz simple σ_{ξ} se halla la dirección ξ de {2.3}, los planos definidos por cualquier dirección normal a ésta sólo tienen tensión normal (de valor el de la raíz doble); eligiendo entre ellas dos perpendiculares entre sí η y ζ , forman con ξ ejes ortogonales principales.

c) La raíz es triple.

Todo plano tiene la misma tensión:

Se trata de un caso de presión hidrostática.



2.3 TENSIONES PRINCIPALES.

Se denominan direcciones principales a las direcciones para las que el plano correspondiente está sometido sólo a tensión normal σ (tensión orientada según esa dirección).

Si ξ es una de tales direcciones y σ_{ξ} es el valor de la tensión normal para el plano definido por ξ , la inexistencia de tensión tangencial puede expresarse como paralelismo entre el vector de tensión y el versor del plano:

$$\{\tau_{\xi}\} = \sigma_{\xi} \cdot \{\nu_{\xi}\}$$

De dicha expresión pueden obtenerse las direcciones que tienen tal propiedad (direcciones principales) {2.3}, y los valores de la tensión normal correspondientes (tensiones principales o valores principales de la tensión) {2.4} en el orden siguiente: *

$$|\{\tau\} - \sigma \cdot \{I\}| = 0 \quad \{2.4\}$$

$$\{\nu_{\xi}\} \cdot (\{\tau\} - \sigma_{\xi} \cdot \{I\}) = \{0\} \quad \{2.3\}$$

2.4 INVARIANTES DEL TENSOR.

El tensor $\{\tau\}$ tiene tres invariantes:

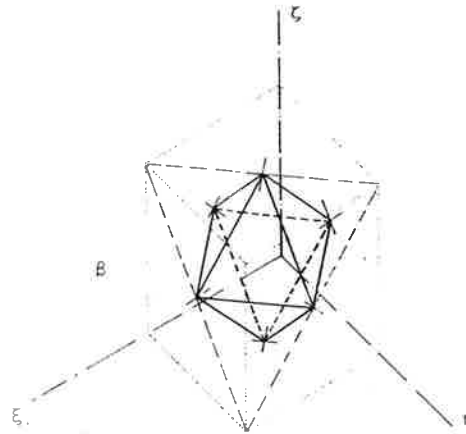
$$1^{\circ} \text{ Traza del tensor: } \{\bar{\tau}\} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z =$$

$$= \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta} = \dots$$

$$2^{\circ} \text{ Suma de adjuntos de la diagonal principal: } A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = A_{\xi\xi} + A_{\eta\eta} + A_{\zeta\zeta} = \dots$$

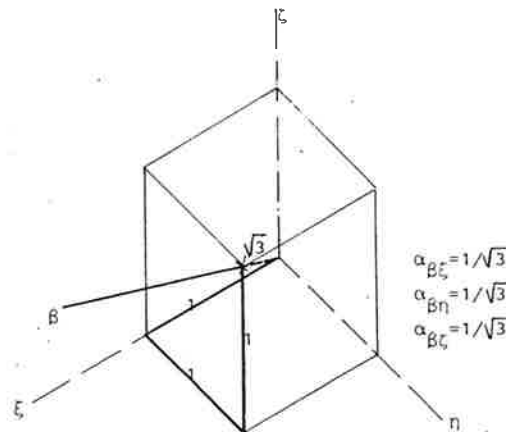
siendo $A_{xx} = \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{yz}^2$, obteniéndose el resto por rotación de índices.

$$3^{\circ} \text{ Determinante del tensor } |\{\tau\}| = \text{cte.}$$



PLANOS OCTAEDRICOS

Obtenidos trazando planos normales a las diagonales: Si se hacen pasar por los centros de las caras definen un OCTAEDRO.



2.5 PLANOS OCTAEDRICOS.

Las 8 direcciones:

$$\{v_i\} = \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

medidas respecto de los ejes principales definen los planos octaédricos que se caracterizan por tener las mismas tensiones normal y tangencial:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + (\sigma_\eta - \sigma_\zeta)^2 + (\sigma_\zeta - \sigma_\xi)^2}$$

DEFORMACION, COMPATIBILIDAD

* Desplazamiento de un punto arbitrario:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \{u\} = \{u \ v \ w\} \quad (\text{siendo } u = u(X,Y,Z), \text{ etc.})$$

Giro del entorno de un punto:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \{\theta\} = \{\theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}, \text{ donde:}$$

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{ver figura (3.1)})$$

La deformación pura queda definida por la matriz $\{e\}$ de movimientos de los puntos que se hallan sobre los ejes a distancia unidad del punto que se considere:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \{e\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & \epsilon_y & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & \epsilon_z \end{Bmatrix}$$

Siendo la distorsión angular $\gamma_{xy} = e_{xy} + e_{yx}$ (fig.(3.2))

** De la figura (3.1) se obtiene:

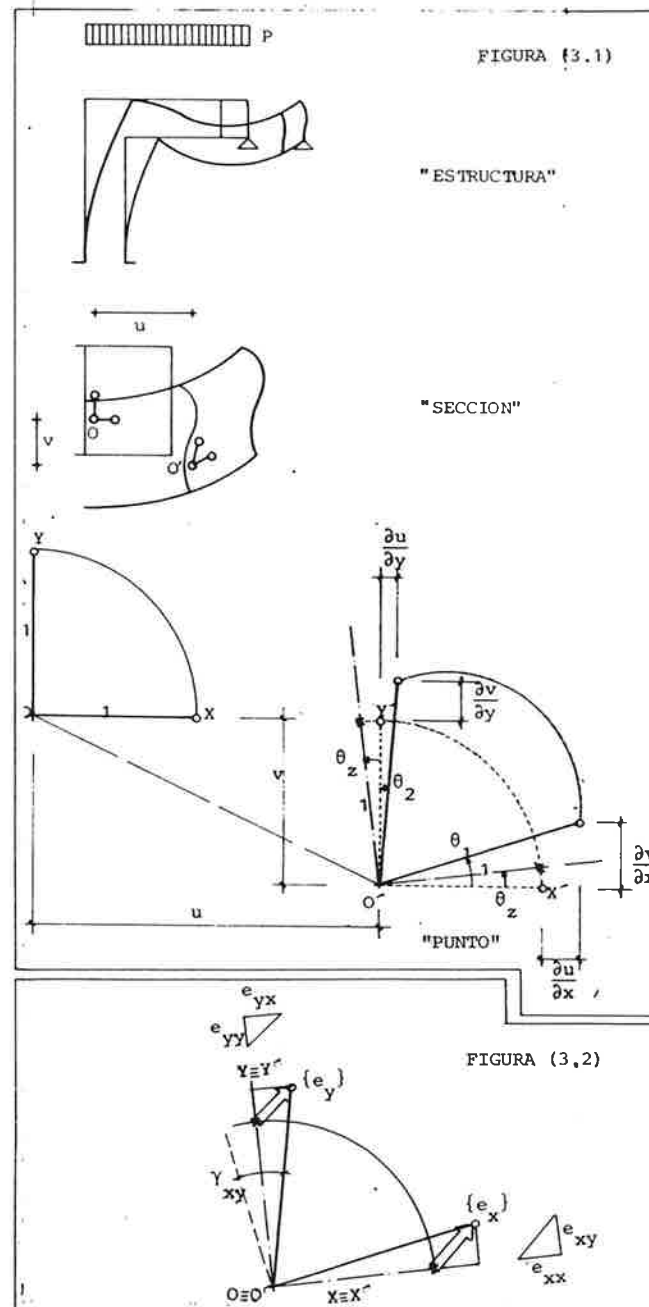
$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

y análogamente para el resto. Por tanto:

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \{e\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \{e\} = \frac{1}{2} \{V\}^T \{u\} + \frac{1}{2} \{u\}^T \{V\} \quad (3.1)$$



3.1 MOVIMIENTOS Y DEFORMACION.

Toda estructura cargada y en equilibrio se halla deformada: Los puntos de la estructura se han desplazado de sus posiciones originales una cierta distancia en las tres direcciones del espacio ($\{u\} = \{u,v,w\}$ para cada punto), habiéndose deformado todas las líneas originales.

Si definimos el entorno del punto O como, una esfera de radio unidad centrada en O y consideramos en particular los tres puntos a la distancia unidad según las tres direcciones del espacio, dicho entorno se ha deformado (los puntos ya no están a la distancia unidad, ni sobre ejes ortogonales).

Si de los movimientos de los puntos del entorno eliminamos la parte que corresponde al desplazamiento de O ($\{u,v,w\}$) y la que corresponde a la rotación de los ejes que acompañan al punto, los movimientos restantes corresponden a la deformación pura del entorno de O. *

Expresamos el estado de deformación del punto por una matriz cuyas filas son los movimientos (debidos sólo a la deformación) de los puntos situados sobre los ejes a la distancia unidad, y cuyas columnas son las componentes de dichos movimientos, medidas paralelas a los ejes X,Y,Z respectivamente.

Las deformaciones se derivan unívocamente de los movimientos generales de la estructura: **

$$\{e\} = \frac{1}{2} \{V\}^T \{u\} + \frac{1}{2} \{u\}^T \{V\} \quad (3.1)$$

$\{e\}$ es una matriz simétrica respecto de la diagonal principal.

* Puesto que:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Sumando las últimas ecuaciones resulta:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}$$

rotando índices:

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad \{3.2\}$$

obtenemos tres expresiones llamadas comúnmente "Primer grupo de ecuaciones de compatibilidad".

Igualmente puede establecerse:

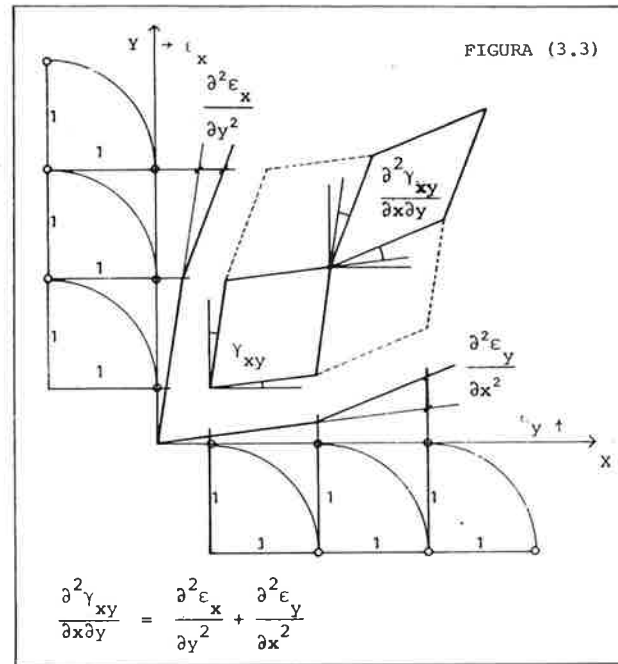
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right)$$

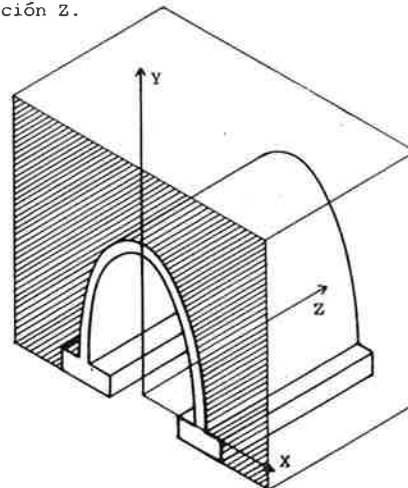
Que pueden verificarse sustituyendo los e_{ij} por sus valores en función de $\{u\}$.

Este conjunto de ecuaciones es el llamado "Segundo grupo de ecuaciones de compatibilidad".



EJEMPLO de estado PLANO de Deformación.

Túnel indefinido. No hay movimientos en la dirección Z.



3.2 COMPATIBILIDAD.

Las seis funciones que definen las componentes del estado de deformación $\{e\}$ se derivan de las tres funciones que expresan los movimientos de la estructura $\{u\}$.

Es claro, pues, que las componentes de la deformación en cada punto no pueden ser totalmente arbitrarias, sino que se encuentran ligadas entre sí por relaciones funcionales. *

Estas relaciones pueden escribirse de diversas maneras.

En la figura (3.3) puede observarse una descripción física del primer grupo de ecuaciones:

Situando sobre el eje X elementos con alargamientos ϵ_y crecientes, y sobre el eje Y elementos con ϵ_x crecientes, para mantener la continuidad se precisan distorsiones que se incrementan con X e Y de tal modo que su variación respecto de esos ejes es igual a la suma de las derivadas segundas de los alargamientos.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad \{3.2\}$$

Puesto que las seis componentes de $\{e\}$ se derivan de tres funciones $\{u\}$, sus relaciones no bastan para resolver el problema de determinar sus valores:

Subsisten tres funciones incógnita independientes.

3.3 ESTADO PLANO DE DEFORMACION.

Es aquel para el que no existen deformaciones en una dirección.

Dicho estado no se corresponde, en general, con un estado plano de tensión.

* El movimiento de un punto $P_\xi = \{v_\xi\}$ queda determinado por el de los puntos X, Y, Z ; a distancia unidad del origen si consideramos constante la deformación en el elemento de volumen (cosa perfectamente viable si despreciamos infinitésimos de segundo o mayor orden).

En este caso P_ξ acompaña a X (e, Y, Z) en su movimiento, pero al ser su distancia al plano OYZ menor: $\alpha_{\xi x}$ ($\alpha_{\xi y}, \alpha_{\xi z}$) su movimiento es proporcionalmente menor.

El movimiento total es la suma de los procedentes de cada una de las direcciones.

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \alpha_{\xi x} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + \alpha_{\xi y} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + \alpha_{\xi z} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{\xi x} & \alpha_{\xi y} & \alpha_{\xi z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

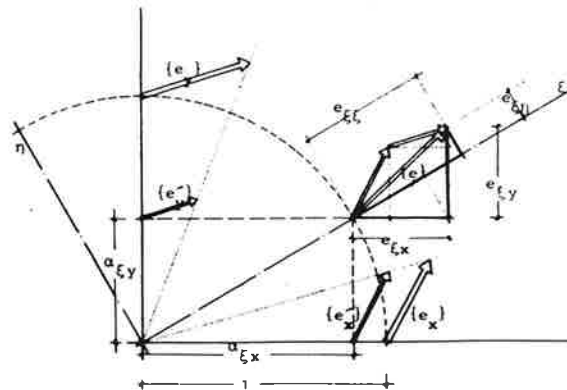
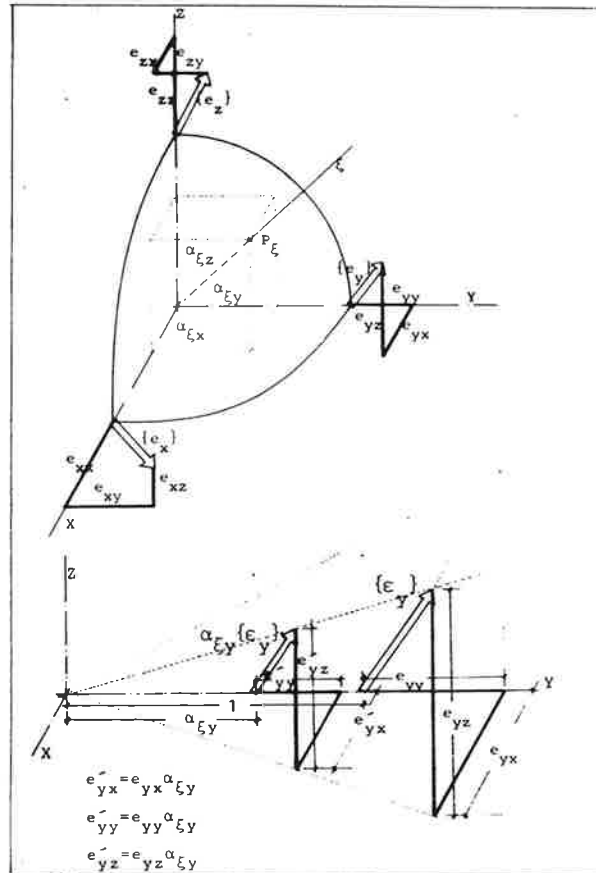
$$\begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

para ejes ortogonales $\xi \eta \zeta$

$$\begin{aligned} ** \quad & \begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} e_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} e_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \\ \text{es decir} \quad & \begin{bmatrix} e_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} = \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{xyz} \quad (i) \end{aligned}$$

*** Dichas deformaciones se expresan sobre los nuevos ejes proyectando, análogamente a {2.2}.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} e_{\xi\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_\xi \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} e_{\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_\eta \end{bmatrix}^T \quad \begin{bmatrix} e_{\xi\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_\zeta \end{bmatrix}^T \\ \text{es decir} \quad & \begin{bmatrix} e_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} e_{\eta\xi\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\eta \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} e_{\zeta\xi\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\zeta \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}^T \\ \text{o, abreviadamente} \quad & \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} e_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}^T \\ \text{y por (i)} \quad & \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}^T \quad (4.2) \end{aligned}$$



TENSOR DE DEFORMACIONES

4.1 DEFORMACION EN UNA DIRECCION CUALQUIERA.

Sea un elemento de volumen situado en torno al punto en estudio. Como ya hemos hecho para los ejes coordenados, definimos la deformación en una dirección cualquiera por el movimiento (debido sólo a deformación) experimentado por un punto situado en dicha dirección, a la distancia unidad del original.

Dada una dirección ξ , las coordenadas de dicho punto son $\{v_\xi\}$ y el movimiento del punto queda definido por: *

$$\begin{bmatrix} e_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.2 CAMBIO DE EJES.

Definido un estado de deformación en los ejes X, Y, Z ($\{e\}_{xyz}$) es conveniente poder expresar dicho estado en otros ejes ortogonales cualesquiera.

Si definimos tal nuevo conjunto de ejes ξ, η, ζ :

1º) Por {4.1} se obtienen las deformaciones correspondientes a dichas direcciones medidas sobre los antiguos ejes: **

$$\begin{bmatrix} e_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} = \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{xyz}$$

2º) Las componentes de deformación obtenidas se expresan sobre los nuevos ejes proyectando las anteriores: ***

$$\begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix}_{xyz} \begin{bmatrix} v_{\xi\eta\zeta} \end{bmatrix}^T_{xyz}$$

o abreviadamente

$$\begin{bmatrix} e \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}^T \quad (4.2)$$

siendo $\{e\}$ el tensor de deformaciones.

* Análogamente al caso del tensor de tensiones:

$$\{e_{\xi}\} = \varepsilon_{\xi} \{v_{\xi}\}$$

$$\{e_{\xi}\} = \varepsilon_{\xi} \{v_{\xi}\} \{I\}$$

Considerando {4.1} se obtiene:

$$\{v_{\xi}\} \{e\} - \{v_{\xi}\} \varepsilon_{\xi} \{I\} = \{0\}$$

$$\{v_{\xi}\} (\{e\} - \varepsilon_{\xi} \{I\}) = \{0\} \quad \{4.3\}$$

y siendo $\{v_{\xi}\}$ un vector unidad debe ser nulo el determinante siguiente:

$$|\{e\} - \varepsilon \{I\}| = 0 \quad \{4.4\}$$

Obtenidas las raíces ε_{ξ} , ε_{η} , ε_{ζ} de dicha "ecuación característica" pueden, igual que en aquel caso, hallarse las direcciones principales con las ecuaciones {4.3}.

** Dilatación cúbica:

$$\theta = (1+\varepsilon_{\xi})(1+\varepsilon_{\eta})(1+\varepsilon_{\zeta}) - 1 \approx \varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta} + \varepsilon_{\zeta} =$$

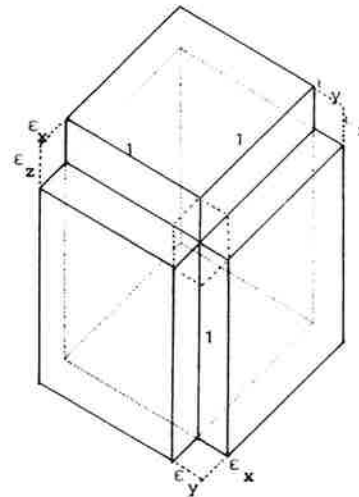
$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \{\bar{e}\}$$

$$\theta = \text{Traza de } \{e\} = \{\bar{e}\} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$$

$$\theta = \{\bar{e}\} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \{V\} \{u\}^T \quad \{4.5\}$$

DILATACION + DISTORSION = DEFORMACION

$$\begin{bmatrix} \frac{\theta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{\theta}{3} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & \varepsilon_y - \frac{\theta}{3} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & \varepsilon_z - \frac{\theta}{3} \end{bmatrix} = \{e\}$$



DILATACION CUBICA

4.3 DEFORMACIONES PRINCIPALES.

Al igual que en el caso de las tensiones se denominan direcciones principales aquellas para las que sólo existe alargamiento o acortamiento, (deformación orientada según esa dirección).

Siendo ξ una de tales direcciones y ε_{ξ} el valor del alargamiento (acortamiento) de la misma, resulta:

$$\{e_{\xi}\} = \varepsilon_{\xi} \{v_{\xi}\}$$

de donde se derivan los valores principales de la deformación: *

$$|\{e\} - \varepsilon \{I\}| = 0 \quad \{4.4\}$$

y las direcciones principales:

$$\{v_{\xi}\} (\{e\} - \varepsilon_{\xi} \{I\}) = \{0\} \quad \{4.3\}$$

4.4 DILATACION CUBICA Y DISTORSION.

Dilatación cúbica θ es el incremento de volumen respecto de la unidad y es igual a la traza del tensor de deformación, si despreciamos los cuadrados de las deformaciones e frente a sus valores: **

$$\theta = \{\bar{e}\} = \{V\} \{u\}^T \quad \{4.5\}$$

Suele considerarse dividido el tensor de deformaciones en dos partes, de DILATACION en volumen y de DISTORSION de forma.

CIRCULO DE MOHR

$$\{\tau\}_{\alpha\beta} = \{v\}\{u\}_{\xi\eta}\{v\}^T$$

$$\{v\} = \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\xi} & \alpha_{\alpha\eta} \\ \alpha_{\beta\xi} & \alpha_{\beta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma_{\alpha} \tau_{\alpha\beta}\} = \{\cos\alpha \sin\alpha\} \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\xi} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{\eta} \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

Trazando por η una recta que forme con X un ángulo α y proyectando:

1°) σ_{ξ} sobre ésta obtenemos un punto α

2°) O sobre ésta obtenemos un punto B

luego proyectando α y B sobre la horizontal obtenemos los puntos A y C , resultando:

$$OC = \sigma_{\xi} \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_{\eta} \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_{\alpha}$$

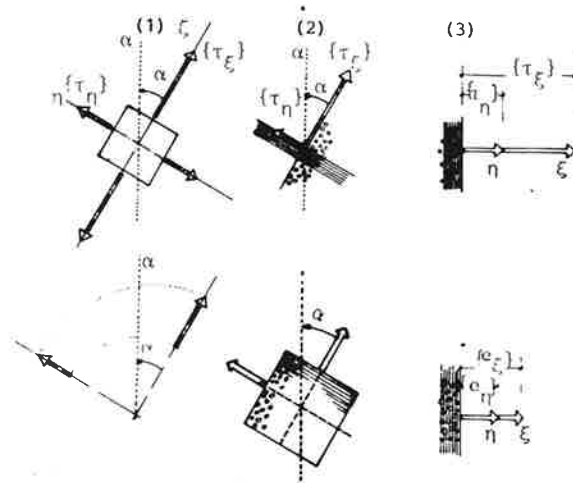
$$Ca = (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\tau_{\alpha\beta}$$

El punto opuesto a α representa, pues, $\{\tau_{\alpha}\}$ al ser su abscisa igual a σ_{α} y su ordenada igual a $\tau_{\alpha\beta}$.

** Observando la figura inferior, los puntos α, α' dada la construcción utilizada, forman con los η, ξ un ángulo constante de 90° por lo que se hallan todos ellos sobre una circunferencia de diámetro η, ξ . De la construcción se deducen las dos propiedades siguientes:

LOS PUNTOS EN LA CIRCUNFERENCIA REPRESENTAN DIRECCIONES QUE FORMAN ENTRE SI EL MISMO ANGULO QUE AQUEL CON QUE SE LES OBSERVA DESDE LA MISMA.

CADA PUNTO OPUESTO SOBRE LA VERTICAL REPRESENTA LA TENSION DE LA CARA DEFINIDA POR DICHA DIRECCION.



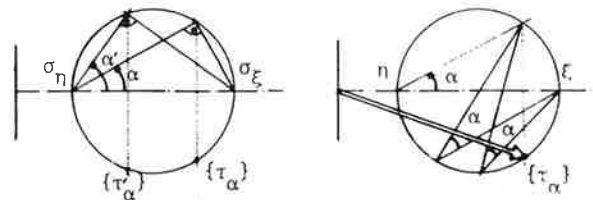
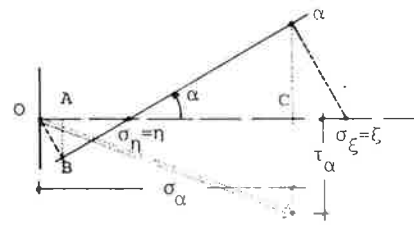
$$OB = \sigma_{\eta} \sin\alpha, \quad OA = \sigma_{\eta} \sin^2 \alpha$$

$$Ba = \sigma_{\xi} \cos\alpha, \quad AC = \sigma_{\xi} \cos^2 \alpha$$

$$OC = \sigma_{\alpha}$$

$$\eta\alpha = (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) \cos\alpha; \quad Ca = (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) \cos\alpha \sin\alpha = -\tau_{\alpha\beta}$$

El ángulo $\xi\eta\alpha = \alpha$, y el punto opuesto a α representa la tensión en la cara α .



5.1 COORDENADAS INTRINSECAS.

Sea un estado plano de tensión (o de deformación) $\{\tau\}$ (o $\{e\}$) conocido en ejes principales. (1)

Si representamos la tensión en cada cara (2) y posteriormente rotamos las caras para superponerlas, (3) obtenemos una representación en la que el eje horizontal representa las direcciones de los versores de las caras (la dirección normal a la cara) y el eje vertical los planos de las caras.

Esta representación (coordenadas intrínsecas) permite comparar los valores de tensión normal y tangencial en todas las direcciones en un solo dibujo.

5.2 CIRCULO DE MOHR.

Conocidos los valores de las tensiones principales y sus direcciones, ¿cómo representamos una dirección α cualquiera en coordenadas intrínsecas? Lo hacemos trazando una recta que desde η forme un ángulo α con ξ y proyectando ξ sobre la misma.

El punto α representa la dirección (pues, visto desde η forma el ángulo α con ξ), y el punto simétrico respecto de la horizontal representa la tensión para la cara que esa dirección define: $\{\tau_{\alpha}\}$. *

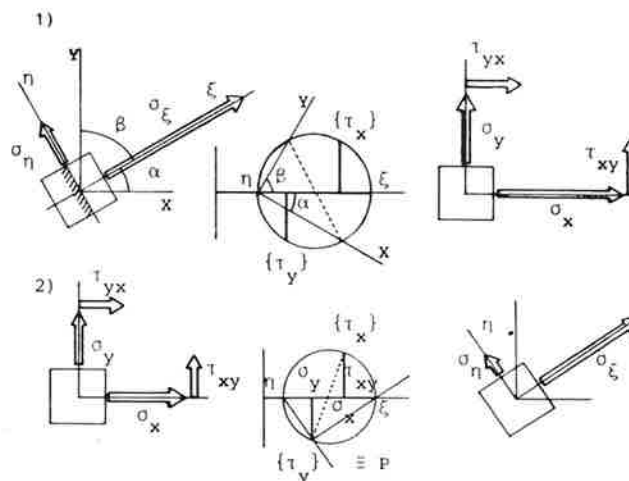
Al elegir direcciones α', α'' , etc. se definen nuevos puntos, quedando todos situados en una circunferencia de diámetro $\{\eta, \xi\}$. Tal construcción se denomina CIRCULO DE MOHR. **

1) HALLAR TENSIONES EN EJES X,Y, A PARTIR DE LAS TENSIONES PRINCIPALES.

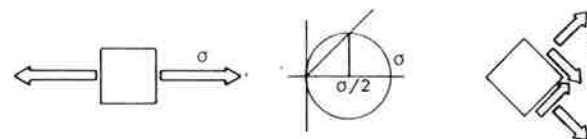
Sobre un eje horizontal se sitúan $\sigma_x \equiv \xi$ y $\sigma_y \equiv \eta$, se dibuja el círculo de diámetro $\overline{\xi\eta}$, desde η se traza una recta que forme un ángulo α con el eje horizontal, la intersección con el círculo representa la dirección X, el opuesto, la tensión $\{\tau_x\}$; después, o bien se procede análogamente para Y, o bien se determinan Y y $\{\tau_y\}$ como los puntos diametralmente opuestos a X y $\{\tau_x\}$.

2) HALLAR LAS TENSIONES PRINCIPALES A PARTIR DE LAS TENSIONES EN EJES X,Y.

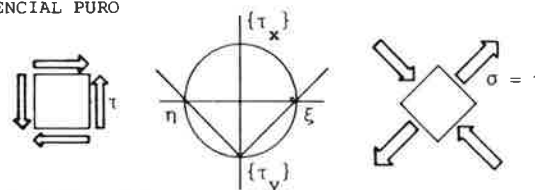
Sobre ejes coordenados intrínsecos se trazan $\{\tau_x\}$ y $\{\tau_y\}$. Se traza el círculo de diámetro definido por ambos puntos. Los puntos de mayor y menor cota horizontal definen las tensiones principales, y sus direcciones, en posición real si se observan desde $P \equiv \{\tau_y\}$.



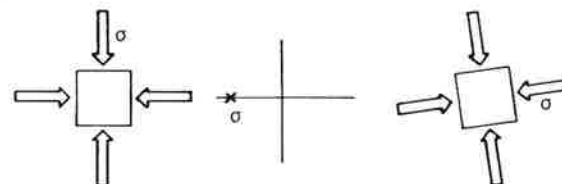
ESTADO LINEAL



TANGENCIAL PURO



PRESION HIDROSTATICA



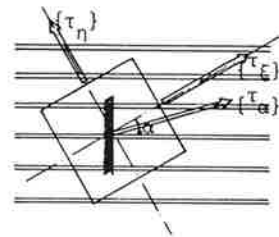
Con el círculo de MOHR puede resolverse cualquier problema del estado de tensión:

- 1) DADO EL ESTADO DE TENSION EN EJES PRINCIPALES, EXPRESARLO EN EJES X,Y.
- 2) DADO UN ESTADO DE TENSION EN EJES X,Y, HALLAR LOS VALORES Y LAS DIRECCIONES PRINCIPALES.

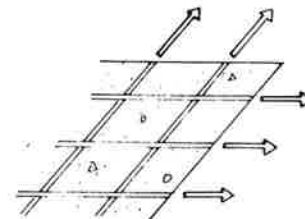
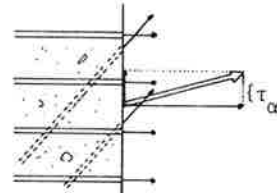
Como el punto que define $\{\tau_y\}$ queda en la horizontal del punto X (que define la dirección horizontal X) suele tomarse $\{\tau_y\} \equiv P$ como polo de la figura y observar las direcciones desde el mismo, por lo que quedan dibujadas no sólo en posición relativa, sino en sus posiciones reales.

5.3 EJEMPLOS DE ESTADOS DE TENSION (O DEFORMACION)

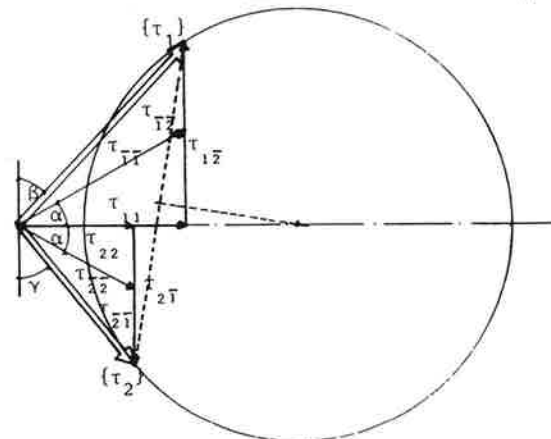
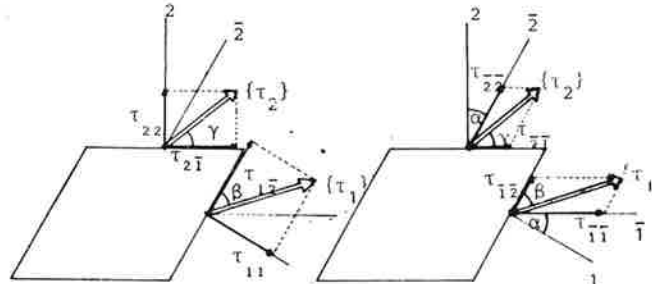
Mediante el círculo de Mohr pueden interpretarse fácilmente estados de tensión particulares, de los que en las figuras se presentan tres casos singulares.



Se necesita armado
oblicuo (componente vertical)



Puede analizarse en coor-
denadas oblicuas.



5.4 COORDENADAS OBLICUAS.

Cuando pretende resolverse un estado plano de tensión en hormigón armado mediante dos familias de armaduras, y no pueden utilizarse las direcciones principales (una dirección es fija, por ejemplo) hay que utilizar coordenadas oblicuas, a fin de poder aislar el efecto de cada armadura en cada corte.

En coordenadas oblicuas pueden considerarse dos tipos de componentes:

- a) COMPONENTES PARALELAS
- b) COMPONENTES PERPENDICULARES

Las componentes paralelas son tales que $\tau_{12} = \tau_{21}$ (por equilibrio de momentos) pero no se corresponden con tensiones normales y tangenciales.

Las componentes perpendiculares se corresponden con las tensiones normal y tangencial de cada cara, pero en este caso $\tau_{12} \neq \tau_{21}$

De cualquier manera, ambos grupos de componentes representan el mismo vector tensión en cada cara (el mismo punto en el círculo de MOHR).

Pueden así resolverse los problemas asociados a los armados. Veremos en las páginas siguientes la resolución de dos problemas que pueden plantearse fácilmente con el auxilio de las coordenadas oblicuas.

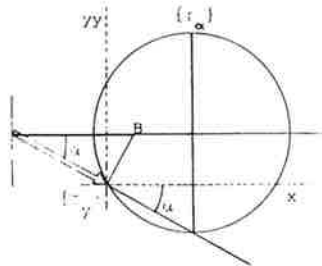
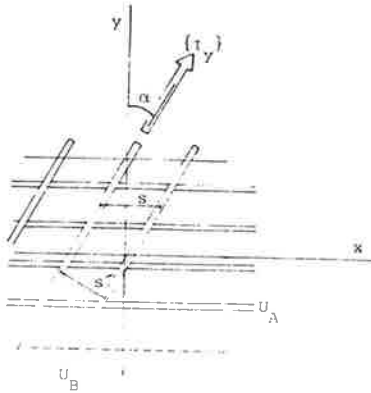
PROBLEMA 1

a) Se representa el estado de tensión por su círculo de MOHR.

b) Al cortar paralelamente a la armadura (Cara Y) obtenemos una cara sin armadura cuya tensión $\{\tau_y\}$ forma un ángulo α con la normal. Puesto que queremos liberar al hormigón de tensiones la armadura debe llevar dicha dirección. Esa es la dirección CONJUGADA.

c) El esfuerzo unitario en el corte normal a Y viene dado por $\{\tau_y\}$. La armadura U_B , separada oblicuamente S, debe resistir $\{\tau_y\}$ por unidad de longitud en ese corte. Trazando por el extremo de $\{\tau_y\}$ una normal a ésta obtenemos B, que mide dicha capacidad mecánica de la armadura U_B medida sobre la perpendicular a su dirección (en la dirección de su separación real S').

d) Las tensiones en un corte paralelo a la dirección de la armadura U_B se obtienen normalmente en el círculo. El punto que define la dirección α está precisamente en la dirección de la tensión $\{\tau_y\}$; $\{\tau_\alpha\}$ es su opuesto, y por la misma construcción que en el apartado c) se obtiene U_A .



PROBLEMA 1'

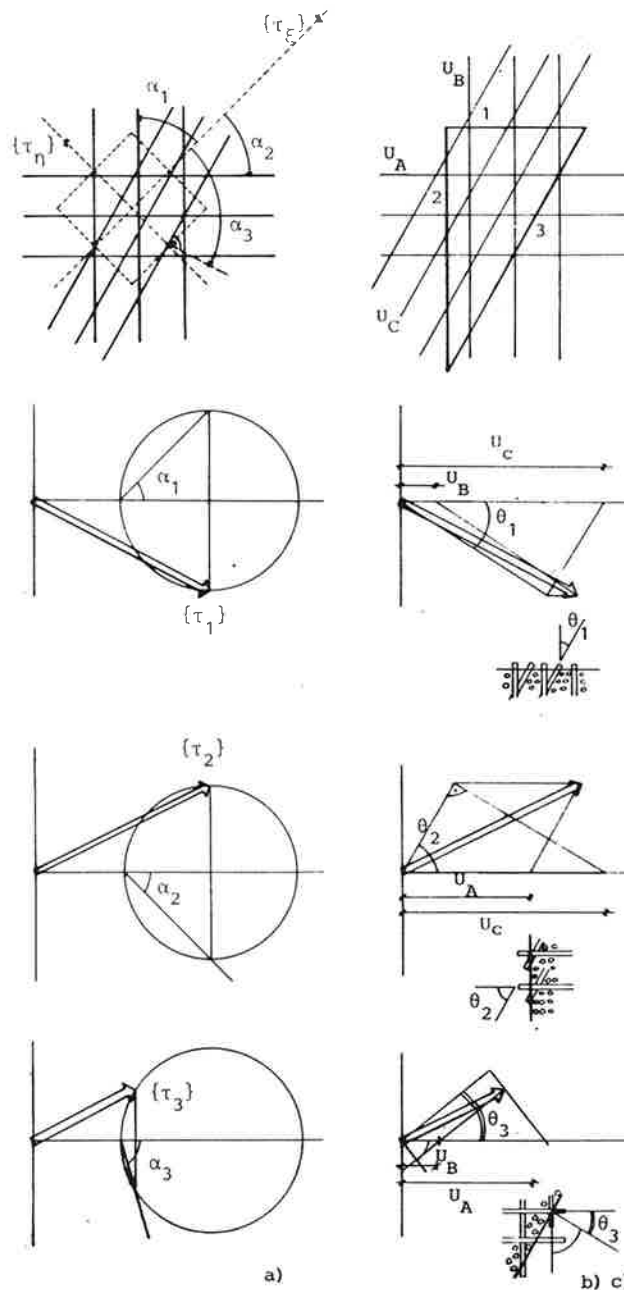
DADO UN ESTADO DE TENSION (TRACCIONES) Y UNA DIRECCION DE ARMADO FIJA, HALLAR LA DIRECCION DE ARMADO CONJUGADA (QUE LIBERA DE TENSIONES TANGENCIALES AL HORMIGON) Y LA CAPACIDAD MECANICA DE ARMADO NECESARIA EN CADA DIRECCION.

PROBLEMA 2

a) Dibujado el círculo de MOHR se obtienen las tensiones correspondientes a las tres caras de un elemento triangular de lados paralelos a las direcciones de armado (1,2,3).

b) Considerando que en cada caso el eje horizontal representa la dirección normal al corte, se trazan las dos direcciones de armado que quedan aisladas por cada uno de los tres cortes (caras 1,2,3) y se descompone la tensión de cada cara entre ambas direcciones.

c) Análogamente al ejemplo anterior las componentes obtenidas representan la capacidad mecánica medida paralelamente al corte (según una dirección oblicua al armado) por lo que para obtener la capacidad mecánica por unidad de longitud normal al armado se traza una normal a la componente hasta la horizontal.



PROBLEMA 2 :

DADO UN ESTADO DE TENSION Y TRES DIRECCIONES DE ARMADO FIJAS, OBTENER LAS CUANTIAS DE ACERO NECESARIAS PARA LIBERAR AL HORMIGON DE TODA TENSION.

RELACION TENSION - DEFORMACION

TENSION NORMAL

* Módulo de elasticidad (o de rigidez) longitudinal.

$$E = \partial \sigma_x / \partial \epsilon_x \quad ; \text{ en material elástico:}$$

$$E = \sigma_x / \epsilon_x = \text{cte.}$$

Coefficiente de POISSON.

$$\nu = -\epsilon_y / \epsilon_x$$

TENSION TANGENCIAL

** Módulo de elasticidad (o de rigidez) transversal.

$$G = \partial \tau / \partial \gamma \quad ; \text{ en material elástico:}$$

$$G = \tau / \gamma = \text{cte.}$$

E, ν , G : CONSTANTES DEL MATERIAL

RELACION ENTRE LAS CONSTANTES DEL MATERIAL

*** De $b/\tau = \epsilon/\sigma$ se deduce en el ensayo de cortadura:

$$\frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \quad \text{o bien} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \{6.1\}$$

$$\epsilon_x = \sigma_x / E - \nu / E (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\epsilon_y = \sigma_y / E - \nu / E (\sigma_z + \sigma_x) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\epsilon_z = \sigma_z / E - \nu / E (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

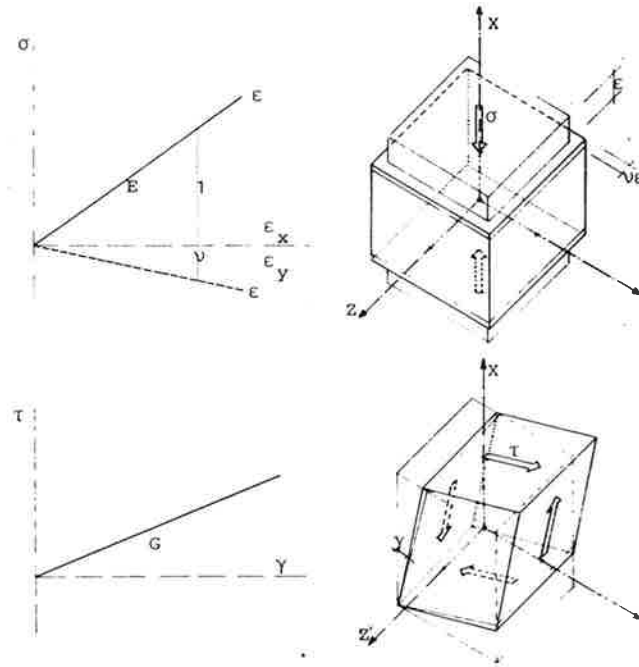
$$\epsilon_{xy} = (1/2G) \tau_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}$$

$$\epsilon_{yz} = (1/2G) \tau_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}$$

$$\epsilon_{zx} = (1/2G) \tau_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}$$

$$\{e\} = \frac{1+\nu}{E} \{ \tau \} - \frac{\nu}{E} S \{ I \} \quad \{6.2\}$$

$$\text{Siendo } S = \{ \tau \} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$



6.1 ENSAYO DE TRACCION O COMPRESION.

Sometida una pieza a tensión normal en una dirección, se observa experimentalmente que en la misma se produce una deformación (longitudinal) de igual dirección y sentido que la tensión aplicada (alargamiento en tracción o acortamiento en compresión), a la vez que una dilatación transversal en todas las demás direcciones de signo contrario.

En la mayoría de los materiales puede admitirse sin error apreciable que dicha relación es constante en los primeros estadios de la carga, manteniéndose constante igualmente el coeficiente entre deformación transversal y deformación longitudinal (material lineal o de Hooke) *

6.2 ENSAYO DE CORTADURA.

Sometida una pieza a tensión tangencial (en general en un ensayo de torsión), se observa análogamente una relación constante entre tensión tangencial y distorsión angular. **

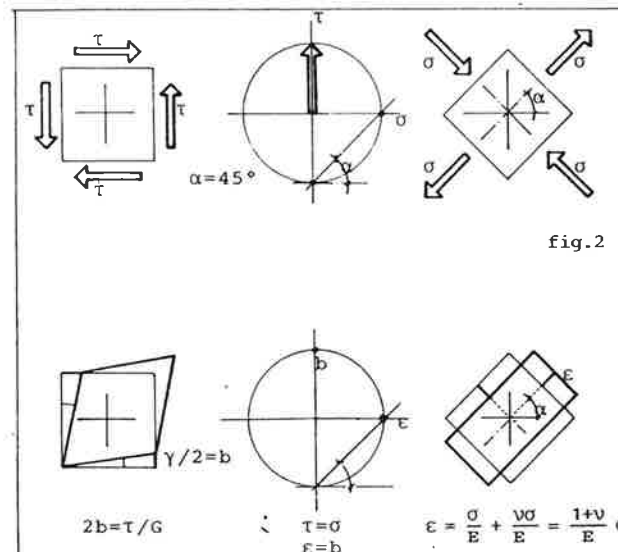
Analizando el estado de tensión tangencial pura puede establecerse una relación entre las tres constantes E, G, ν : *** (figura 2)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \{6.1\}$$

6.3 DEFORMACIONES FUNCION DE LAS TENSIONES.

Basados en los hechos anteriores y superponiendo las deformaciones debidas a cada componente del estado de tensión podemos establecer las deformaciones en función de las tensiones: ****

$$\{e\} = \frac{1+\nu}{E} \{ \tau \} - \frac{\nu}{E} S \{ I \} \quad \{6.2\}$$



$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{y por lo tanto invirtiendo la matriz:}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1-3\nu^2-2\nu^3} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & \nu+\nu^2 & \nu+\nu^2 \\ \nu+\nu^2 & 1-\nu^2 & \nu+\nu^2 \\ \nu+\nu^2 & \nu+\nu^2 & 1-\nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E(1+\nu)}{(1+\nu)^2(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} + \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix}$$

es decir, llamando $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ y $\theta = \{\bar{\epsilon}\} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{bmatrix} + \lambda\theta; \text{ y como } \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} b_{xy} \\ b_{yz} \\ b_{zx} \end{bmatrix}$$

nos queda:

$$\{\tau\} = \frac{E}{1+\nu} \{\epsilon\} + \lambda\theta\{I\} \quad (6.4)$$

$$\lambda\theta = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta = \frac{\nu}{1+\nu} S$$

con lo que obtenemos una relación entre la dilatación cúbica y la tensión media:

$$S = \frac{E}{1-2\nu} \theta; \quad \theta = \{\bar{\epsilon}\} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m = \frac{1-2\nu}{E} \{\bar{\tau}\}$$

6.4 TENSIONES FUNCION DE LAS DEFORMACIONES.

De la expresión {6.2} podríamos intentar despejar $\{\tau\}$:

$$\{\tau\} = \frac{E}{1+\nu} \{\epsilon\} + \frac{\nu}{1+\nu} S \cdot \{I\} \quad (6.3)$$

pero aquí S es función de las tensiones. Sin embargo, como las deformaciones longitudinales (no distorsiones) dependen sólo de las tensiones normales, podemos despejar estas últimas en función de aquellas * y obtenemos de ese modo:

$$\{\tau\} = \frac{E}{1+\nu} \{\epsilon\} + \lambda \cdot \theta \cdot \{I\} \quad (6.4)$$

Comparando las expresiones {6.3} y {6.4} podemos obtener una relación entre la dilatación cúbica $\theta = \{\bar{\epsilon}\}$ y la tensión media $\sigma_m = \{\bar{\tau}\}/3 = S/3$: **

$$\sigma_m = \frac{E}{3(1-2\nu)} \cdot \theta \quad (6.5)$$

expresión en la que el término $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ se denomina módulo de elasticidad de volumen.

Para ESTADOS PLANOS podemos escribir:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{Bmatrix} \tau \\ \epsilon \end{Bmatrix} - c_2 S_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{6.6\}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \epsilon \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{Bmatrix} \tau \\ \epsilon \end{Bmatrix} + \lambda_2 \theta_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{6.7\}$$

siendo:

$$S_2 = \sigma_x + \sigma_y = \{\bar{\tau}\} \quad y \quad \theta_2 = \epsilon_x + \epsilon_y = \{\bar{\epsilon}\}$$

y para ello:

ESTADO PLANO DE TENSION.

$$\sigma_z = 0 \rightarrow S_2 = S; \quad \theta_2 \neq 0$$

$$\theta_2 = \theta - \epsilon_z = \theta - \left(-\frac{\nu}{E}\right) S$$

$$\theta_2 = \theta + \left(\frac{\nu}{E} : \frac{(1-2\nu)}{E}\right) \theta$$

$$\theta_2 = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \theta \quad y \quad como \quad \lambda_2 \theta_2 = \lambda \theta$$

$$\lambda_2 = \frac{E\nu}{1-\nu} \quad y \quad c_2 = \frac{\nu}{E} \quad \{6.8\}$$

ESTADO PLANO DE DEFORMACION.

$$\epsilon_z = 0 \rightarrow \theta_2 = \theta; \quad S_2 \neq S$$

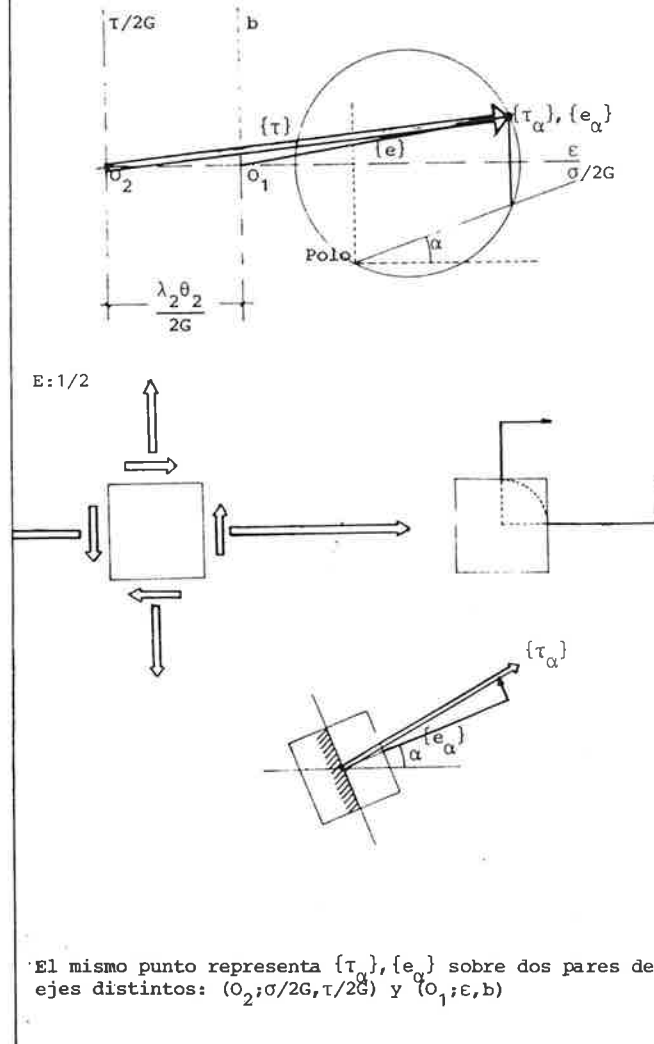
$$S_2 = S - \sigma_z = S - \lambda \theta$$

$$S_2 = S - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1-2\nu}{E} S$$

$$S_2 = \frac{1}{1+\nu} S \quad y \quad como \quad c_2 S_2 = \frac{\nu}{E} S$$

$$\lambda_2 = \lambda \quad y \quad c_2 = \frac{(1+\nu)\nu}{E} \quad \{6.9\}$$

Observando la expresión {6.7} resulta que LOS CIRCULOS de MOHR de TENSIONES Y DEFORMACIONES de un estado dado se pueden superponer en una sola gráfica.



6.5 ESTADOS PLANOS.

Análogamente al caso de estado triple, podemos expresar las tensiones en función de las deformaciones, y viceversa, considerando sólo tensiones y deformaciones en el plano significativo. Las expresiones {6.6} y {6.7} sustituyen a las {6.2} y {6.4}.

Para obtenerlas sabemos que en un estado plano de tensión:

$$\sigma_z = 0; \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

y en un estado plano de deformación:

$$\epsilon_z = 0; \quad \sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y) \neq 0$$

ENERGIA DE DEFORMACION

7.1 CONCEPTOS.

DENSIDAD DE ENERGIA DE DEFORMACION.

Un elemento de volumen unidad sometido a tensión se encuentra deformado. Si incrementamos infinitesimalmente la tensión, la deformación aumenta. El trabajo realizado por las fuerzas (tensiones) exteriores al volumen se almacena como energía de deformación en él, permitiéndole recuperar su forma al cesar la tensión.

Si el proceso de puesta en carga es lento, tensión y deformación se hallarán ligados, y la energía almacenada por unidad de volumen es igual al área bajo la curva tensión-deformación.

DENSIDAD DE LA ENERGIA COMPLEMENTARIA.

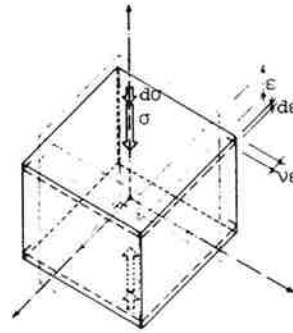
Supongamos el elemento unidad sometido a una fuerza F ($F = \sigma_{\text{final}}$) que actúa instantáneamente. Tras un corto periodo de movimiento, el elemento se estabiliza con una deformación ϵ_t .

El trabajo realizado por F ($F, \epsilon_t = \sigma \cdot \epsilon_t$), y no almacenado como energía de deformación $w_u = 1/2 \sigma \cdot \epsilon_t$, se ha disipado en un proceso dinámico complejo en el que intervienen fuerzas de inercia, viscosidad, etc., hasta alcanzarse el equilibrio estático. Dicho trabajo disipado es la Energía Complementaria, y como afecta a un elemento unidad se denomina Densidad de Energía Complementaria.

Densidad de energía de deformación.

$$dw_u = \sigma d\epsilon$$

$$w_u = \int \sigma d\epsilon ; w_u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \text{ en materiales lineales.}$$



Densidad de energía complementaria.

Puede verse como:

$$dw_u^* = (\sigma_f - \sigma) d\epsilon$$

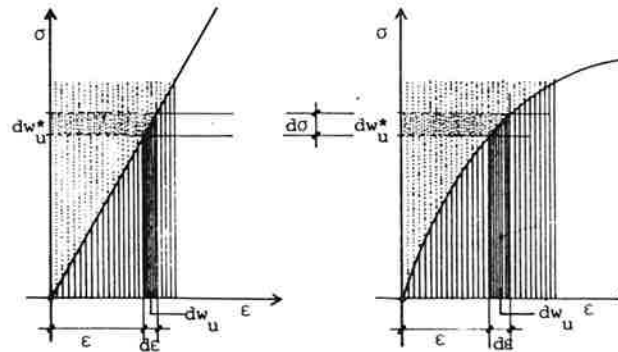
$$w_u^* = \sigma_f \epsilon_f - \int \sigma d\epsilon = \sigma \epsilon - w_u$$

De aquí el nombre de energía complementaria.

$$dw_u^* = \epsilon d\sigma$$

$$w_u^* = \int \epsilon d\sigma \quad w_u^* = w_u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \text{ en materiales lineales.}$$

$$d(\sigma \epsilon) = \sigma d\epsilon + \epsilon d\sigma = dw_u + dw_u^*$$



$$* dw_u = \tau_{xx} de_{xx} + \tau_{yy} de_{yy} + \tau_{zz} de_{zz} + 2\tau_{yz} de_{yz} + 2\tau_{zx} de_{zx} + 2\tau_{xy} de_{xy}$$

que puede escribirse, si expresamos el trabajo en cada cara:

$$dw_u = \{\tau_x\} d\{e_x\}^T + \{\tau_y\} d\{e_y\}^T + \{\tau_z\} d\{e_z\}^T =$$

$$= \begin{Bmatrix} \{\tau_x\} \\ \{\tau_y\} \\ \{\tau_z\} \end{Bmatrix} d \begin{Bmatrix} \{e_x\}^T \\ \{e_y\}^T \\ \{e_z\}^T \end{Bmatrix}$$

que podemos escribir en la forma:

$$dw_u = \{\tau\} d\{e\}^T \text{ y supuesto el material lineal:}$$

$$w_u = \frac{1}{2} \{\tau\} \{e\}^T \quad \{7.1\}$$

$$10101: \{\tau\} \{e\} \# \{\tau\} \{e\}$$

$$** w_u = \int \{\tau\} d\{e\}^T = \int \left(\frac{E}{1+\nu} \{e\} d\{e\}^T + \lambda \theta d\{e\}^T \right) \text{ por } \{6.4\}$$

$$w_u = \frac{E}{2(1+\nu)} \overline{\{e\} \{e\}^T} + \frac{\lambda \theta^2}{2} \quad \{7.2\}$$

$$w_u = \int \{\tau\} d\{e\}^T = \int \left(\{\tau\} \frac{1+\nu}{E} d\{\tau\}^T - \{\tau\} \frac{\nu}{E} ds \right) \text{ por } \{6.2\}$$

$$w_u = \frac{1+\nu}{2E} \overline{\{\tau\} \{\tau\}^T} - \frac{\nu}{2E} S^2 \quad \{7.3\}$$

Densidad de Energía de Dilatación:

$$*** w_D = \frac{1}{2} \sigma_m \theta = \frac{1}{2} \frac{S}{3} \frac{S}{E} = S^2 \frac{(1-2\nu)}{6E} \quad \{7.5\}$$

Densidad de Energía de Distorsión:

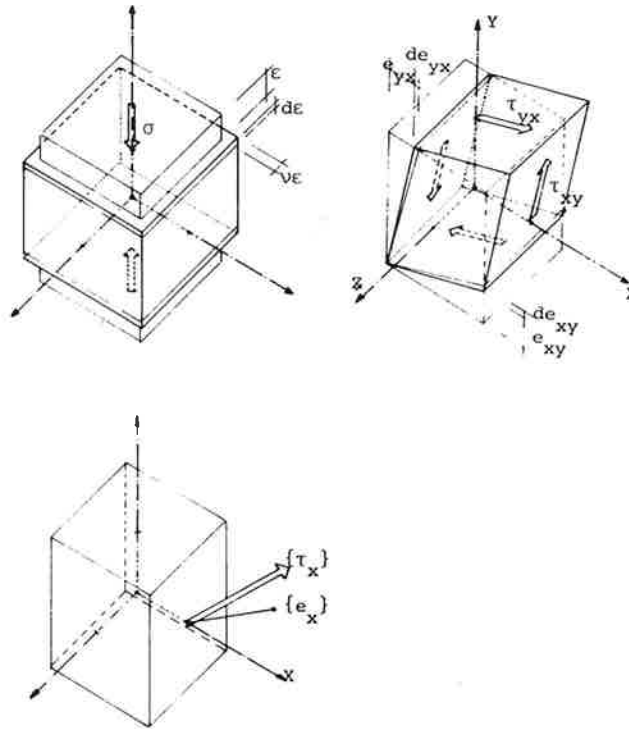
Si expresamos la energía en ejes principales,

$$w_T = w_u - w_D = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \left(\frac{\nu}{E} + \frac{1-2\nu}{3E} \right) S^2 \right) \quad \{7.4\}$$

$$w_T = \frac{1+\nu}{6E} 3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1+\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 =$$

$$= \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)$$

{7.6}



$$\begin{aligned} &+ \text{Densidad de energía de dilatación cúbica} \\ &+ \text{Densidad de energía de distorsión} \\ &= \text{Densidad de energía de deformación} \end{aligned}$$

7.2 DENSIDAD DE ENERGIA DE DEFORMACION.

Para cada componente de tensión puede establecerse la parte que aporta a la densidad de energía de deformación w_u .

Si sumamos todas estas aportaciones, obtenemos para w_u : *

$$w_u = 1/2 \overline{\{\tau\} \{e\}^T} \quad \{7.1\}$$

Podemos expresar la densidad de energía de deformación en función sólo de las tensiones o de las deformaciones sin más que utilizar las expresiones de unas en función de las otras. **

$$w_u = \frac{E}{2(1+\nu)} \overline{\{e\} \{e\}^T} + \frac{\lambda \theta^2}{2} \quad \{7.2\}$$

$$w_u = \frac{1+\nu}{2E} \overline{\{\tau\} \{\tau\}^T} + \frac{\nu S^2}{2E} \quad \{7.3\}$$

7.3 COMPONENTES DE LA ENERGIA DE DEFORMACION.

Podemos expresar la densidad de energía de deformación como suma de dos partes independientes: la primera como energía de dilatación cúbica, correspondiente a la energía almacenada en la dilatación cúbica por la tensión media (w_D) y siendo la segunda la energía de distorsión, correspondiente a alterar la forma del elemento cúbico original sin alterar su volumen (w_T). ***

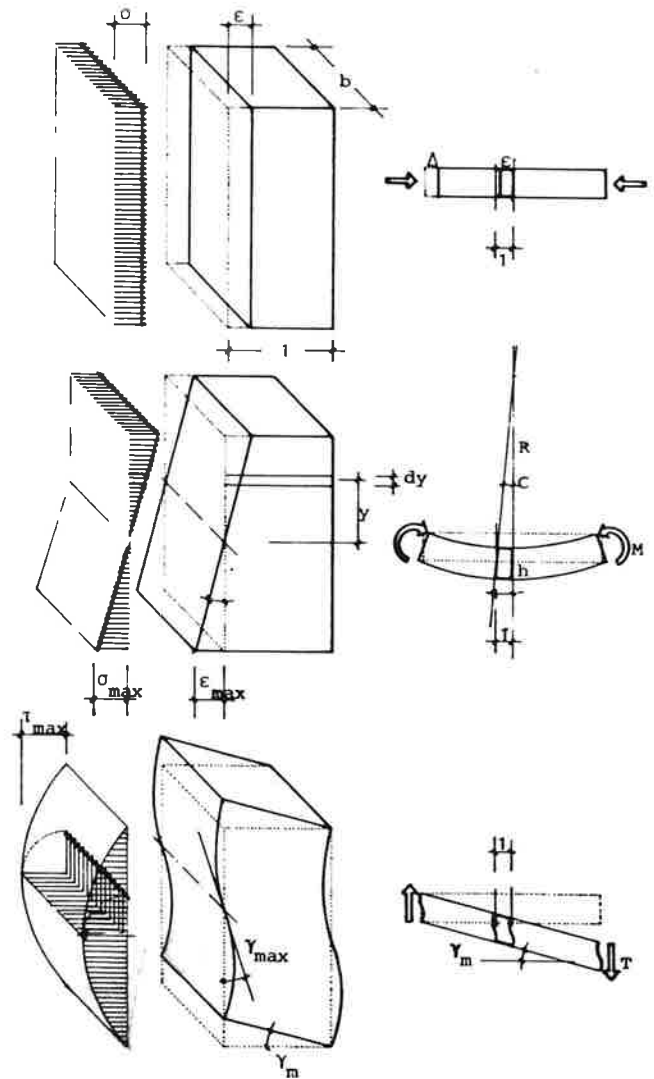
$$w_u = w_D + w_T \quad \{7.4\}$$

$$w_D = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad \{7.5\}$$

$$w_T = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \quad \{7.6\}$$

Todo ello expresado en ejes principales.

$$\begin{aligned}
 w &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int \frac{N}{A} \epsilon A dl = \frac{1}{2} \int N \epsilon dl \\
 w &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} \int \int \frac{M}{I} y \frac{M}{EI} y dy \cdot b \cdot dl = \\
 &= \frac{1}{2} \int dl \int \frac{M}{I} c \cdot b \cdot y^2 dy = \frac{1}{2} \int M \cdot c \cdot dl \\
 w &= \int \frac{1}{\sqrt{2}} \tau \gamma dV = \frac{1}{2} \int dl \int \frac{T s}{b I} \gamma \cdot b \cdot dy = \frac{1}{2} \int T \gamma_m dl
 \end{aligned}$$



7.4 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN BARRAS.

La energía de deformación en un cuerpo no es más que la integral extendida a todo el volumen del cuerpo de la densidad de energía de deformación por el volumen elemental a que corresponde.

$$w = \int w_u dV \quad \{7.7\}$$

En el caso de barras, y para las sollicitaciones usuales podemos escribir:

$$\text{Esfuerzo normal:} \quad w = \frac{1}{2} \int N \epsilon dl$$

$$\text{Momento flector:} \quad w = \frac{1}{2} \int M C dl$$

$$\text{Esfuerzo cortante:} \quad w = \frac{1}{2} \int T \gamma_m dl$$

Energía de deformación total:

$$w = \frac{1}{2} \int dl (N \epsilon + M C + T \gamma_m) \quad \{7.8\}$$

TEORIAS DE ROTURA LOCAL

8.0 INTRODUCCION A TEORIAS DE ROTURA.

Hasta el momento conocemos cómo describir los estados de tensión, $\{\tau\}$, de deformación, $\{e\}$, así como sus relaciones, y la energía empleada en producirlos.

Para caracterizar la rotura del material en todos los estados en que se produce, es preciso poder establecer criterios que permitan deducir todos los estados de rotura (multiaxiales) posibles a partir de unos pocos establecidos experimentalmente (rotura por tensión uniaxial, por ejemplo).

Suponemos conocida la tensión de rotura en tracción uniaxial

$$\sigma_F \text{ (y por tanto } \epsilon_F = \sigma_F/E \text{ y } w_{uF})$$

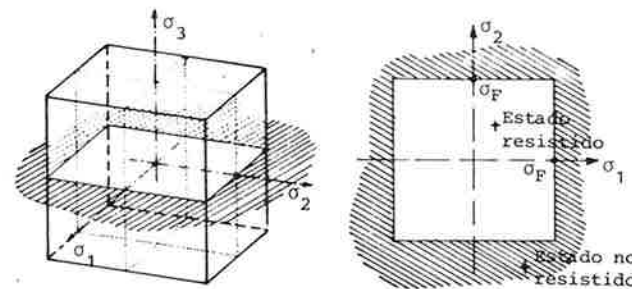
Se trata de caracterizar todos los estados de rotura.

Supongamos que expresamos todos los estados de tensión posibles en un espacio de coordenadas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (tensiones principales). Podemos en él dibujar los estados resistidos, los no resistidos y la superficie límite de rotura.

RANKINE:

$$-\sigma_F \leq \sigma_i \leq \sigma_F$$

{8.1}



8.1 TEORIAS DE ROTURA LOCAL.

CRITERIO DE MAXIMA TENSION NORMAL (RANKINE).

Se produce la rotura en un punto cuando alguna de las tensiones principales (que incluyen la máxima tensión normal) alcanza la tensión de rotura de tracción uniaxial.

$$\text{Criterio de resistencia: } -\sigma_F \leq \sigma_i \leq \sigma_F \text{ {8.1}}$$

(σ_i es una tensión principal cualquiera).

Es relativamente adecuado en materiales frágiles.

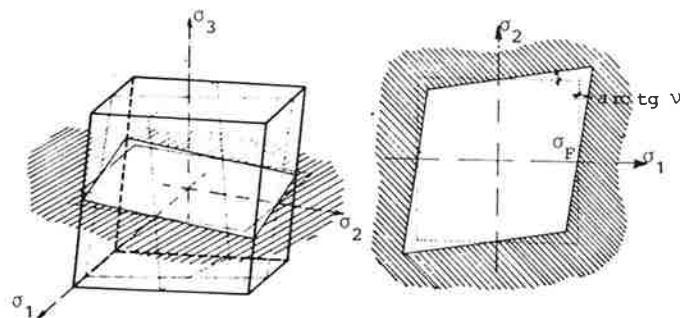
SAINT - VENANT:

$$-\epsilon_F \leq \epsilon_i \leq \epsilon_F$$

$$-\frac{\sigma_F}{E} \leq \frac{\sigma_i}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_j + \sigma_k) \leq \frac{\sigma_F}{E}$$

y por lo tanto;

$$-\sigma_F \leq \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \leq \sigma_F \quad \{8.2\}$$



CRITERIO DE MAXIMA DEFORMACION NORMAL (SAINT-
VENANT).

Se produce la rotura cuando alguna de las deformaciones principales alcanza la deformación de rotura de tracción uniaxial.

Criterio de resistencia:

$$-\sigma_F \leq \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \leq \sigma_F \quad \{8.2\}$$

i, j, k , son tres direcciones principales.

Habiendo sido desechado, empieza a utilizarse de nuevo en materiales reforzados con fibras en los que limitar la deformación de las fibras implica limitar la deformación máxima.

TRESCA:

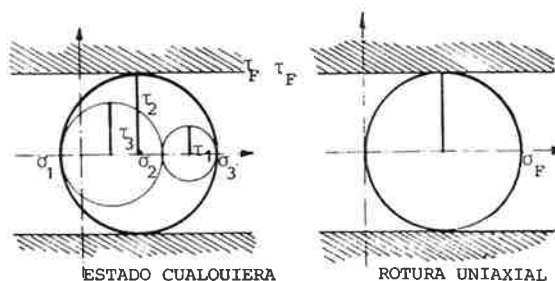
$$|\tau_i| \leq |\tau_F|$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_F = \frac{\sigma_F}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$|\sigma_i - \sigma_j| \leq |\sigma_F| \quad \{8.3\}$$



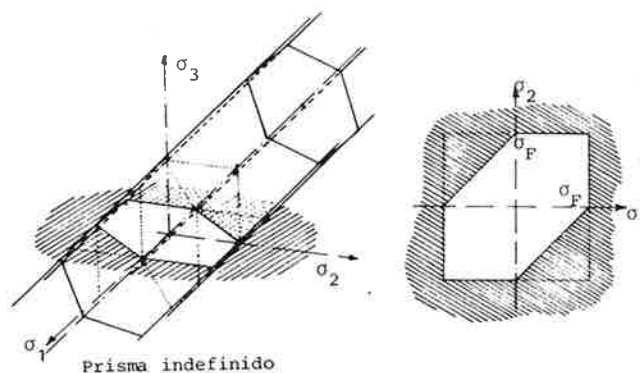
CRITERIO DE MAXIMA TENSION TANGENCIAL (TRESCA).

Se produce la rotura cuando alguna de las tensiones tangenciales (en alguno de los infinitos planos que pasan por el punto) supera la máxima tensión tangencial del ensayo de rotura uniaxial

Criterio de resistencia: $|\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_F \quad \{8.3\}$

Siendo i, j , todos y cada uno de los pares de direcciones principales.

Se utiliza con materiales dúctiles, contando con amplio respaldo experimental.



BELTRAMI:

$$w_u \leq w_{uF} \quad w_{uF} = \frac{1}{2} \sigma_F \epsilon_F = \frac{\sigma_F^2}{2E}$$

$$w_u = \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

por tanto;

$$\frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)) \leq \frac{\sigma_F^2}{2E}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_F^2 \quad \{8.4\}$$

que en estado plano de tensión puede escribirse

de la forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_F^2 \quad (\sigma_3 = 0)$$

HUBER - VON MISES:

$$w_T \leq w_{TF} \quad w_{TF} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_F^2$$

$$\frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \leq$$

$$\leq \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_F^2$$

$$((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \leq 2\sigma_F^2 \quad \{8.5\}$$

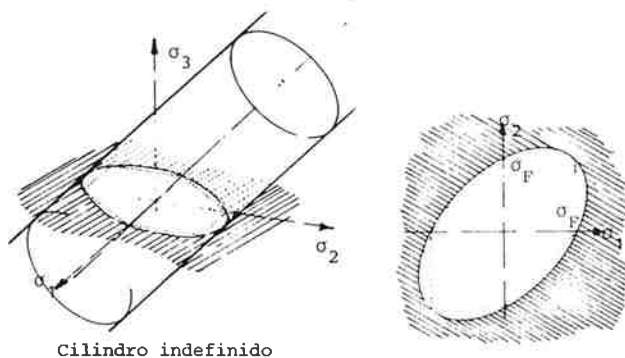
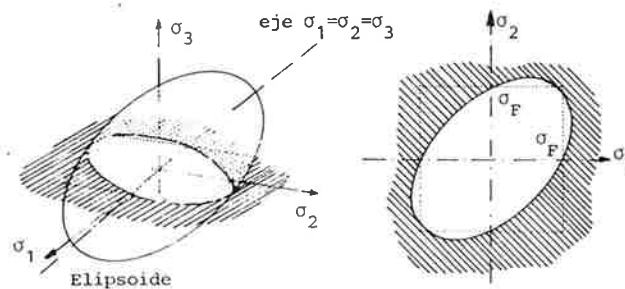
que en estado plano de tensión puede escribirse

de la forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_F^2 \quad (\sigma_3 = 0)$$

y que por ejemplo para estado tangencial puro nos establece:

$$\tau \leq \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}}$$



CRITERIO DE MAXIMA ENERGIA DE DEFORMACION (BELTRAMI).

Se produce la rotura en un punto cuando la densidad de energía de deformación alcanza la correspondiente a la de la rotura en el ensayo de tracción uniaxial.

Criterio de resistencia:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_F^2 \quad \{8.4\}$$

Tiene hoy día sólo valor histórico como precedente del criterio siguiente.

CRITERIO DE MAXIMA ENERGIA DE DISTORSION (HUBER -VON MISES).

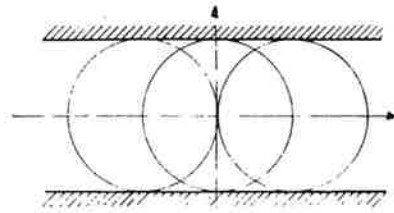
Se produce la rotura en un punto cuando se alcanza la energía de distorsión correspondiente a la de la rotura en el ensayo de tracción uniaxial.

Criterio de resistencia:

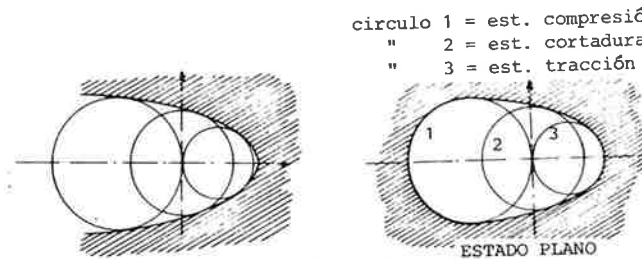
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_F^2 \quad \{8.5\}$$

Se utiliza para materiales dúctiles en competencia con el criterio de TRESCA.

Es el utilizado para el acero en la norma MV 103.



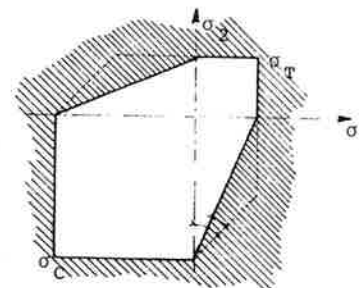
CRITERIO DE TRESCA



CRITERIO DE MOHR

circulo 1 = est. compresión
 " 2 = est. cortadura
 " 3 = est. tracción

ESTADO PLANO



Criterio de Mohr
 " " modificado

CRITERIO DE MOHR.

Se produce la rotura cuando el mayor círculo de Mohr correspondiente al estado de tensión alcanza la línea envolvente a los círculos que representan la rotura en diversos ensayos estándar (tracción simple, cortadura, compresión simple, ...).

Se utiliza en materiales con comportamiento diferente en tracción y compresión, como el hormigón.

Para estados planos, puesto que una de las tres tensiones principales es nula, la envolvente, construida con los tres ensayos citados arriba, es de gran sencillez.

En el plano de estados posibles σ_1 , σ_2 , el criterio define un exágono irregular limitado por (σ_T, σ_C) en ambos ejes.

A menudo se modifica el criterio añadiéndole una zona en estados de signos contrarios, como se indica en la figura.

* Existen gran diversidad de criterios adicionales para materiales concretos, que, sin embargo, pueden entenderse fácilmente en su comparación con los ya indicados.

$$\{\tau\}$$

$$\{e\} = \frac{1}{2} (\{v\}^T \{u\} + \{u\}^T \{v\}) \quad (3.1)$$

$$\{\tau_\alpha\} = \{v_\alpha\} \{\tau\} \quad (2.1)$$

$$\{\tau^-\} = \{v^-\} \{\tau\} \{v^-\}^T \quad (2.2)$$

$$\{\tau\} = \frac{E}{1+\nu} \{e\} + \lambda \theta \{I\}; \quad \theta = \{e\} \quad (6.4)$$

$$\{e\} = \frac{1+\nu}{E} \{\tau\} - \frac{\nu}{E} s \{I\}; \quad s = \{\tau\} \quad (6.2)$$

$$w_u = \frac{1}{2} \{\tau\}^T \{e\} \quad (7.1)$$

EQUILIBRIO

$$\{v\} \{\tau\} + \{p\} = \{0\} \quad (1.1)$$

COMPATIBILIDAD

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}$$

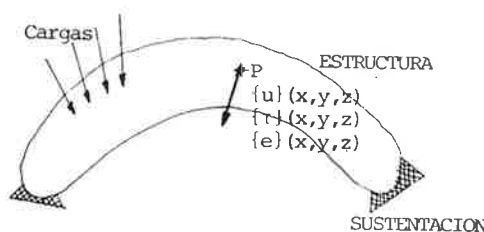
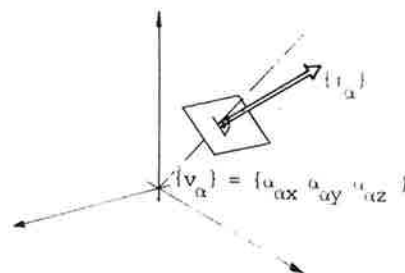
$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} \quad (3.2)$$

INCOGNITAS

RELACIONES

6		$\{\tau\}$: 6 componentes (funciones incógnita)
3		Equilibrio: 3 ecuaciones.
6		$\{e\}$: 6 componentes (funciones incógnita)
3		Compatibilidad: proceden de sólo 3 componentes independientes de desplazamiento $\{u\}$.
		$\{\tau\} + \{e\}$: 6 relaciones independientes.

$$\frac{6}{12} = \frac{6}{12}$$



ECUACIONES INDEFINIDAS DEL MEDIO ELASTICO

9.0 EL PROBLEMA ELASTICO.

Hasta aquí hemos descrito el estado de tensión $\{\tau\}$, y las ecuaciones de equilibrio que ligán a sus componentes, el estado de deformación $\{e\}$, derivado de los movimientos de cada punto del cuerpo $\{u\}$, y las ecuaciones de compatibilidad entre sus componentes.

Sabemos expresar tensión y deformación asociados a cualquier dirección, y podemos expresar los estados $\{\tau\}$, $\{e\}$ en ejes cualesquiera.

Hemos establecido las relaciones entre tensiones y deformaciones en materiales "hookeanos" y, finalmente, hemos establecido el concepto de energía de deformación.

Con dichos instrumentos puede ya plantearse estrictamente el problema elástico:

Dado un cuerpo elástico sometido a cargas, y sustentado (coaccionado en su movimiento) en puntos suficientes como para equilibrar las cargas, hallar los movimientos de todos sus puntos, y los estados de tensión y deformación de los mismos.

Para ello contamos ya con ecuaciones suficientes. En efecto, si suponemos que los desplazamientos, deformaciones y tensiones son funciones de las coordenadas del punto, hemos obtenido que en todo punto las seis componentes de las tensiones están determinadas por las seis componentes de la deformación {6.4}, y que a su vez, éstas dependen de las tres componentes del desplazamiento del punto {3.1}.

a.1) Se trata de expresar las ecuaciones de equilibrio {1.1} en función de los movimientos del punto {u}.

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ \{ \nabla \} & . & \{ \tau \} & + & \{ \rho \} & = & \{ 0 \} \end{matrix} \quad \{1.1\}$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ \{ \tau \} = & \frac{E}{1+\nu} \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ \{ e \} & + & \lambda \theta \{ I \} \end{matrix} \quad \{6.4\}$$

$$\frac{E}{1+\nu} \begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ \{ \nabla \} & . & \{ e \} & + & \lambda \{ \nabla \} \theta \{ I \} & + & \{ \rho \} & = & \{ 0 \} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ \{ e \} = & \frac{1}{2} \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \{ \nabla \}^T & \{ u \} & + & \frac{1}{2} \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ \{ u \}^T & \{ \nabla \} \end{matrix} \quad \{3.1\}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ \{ \nabla \} & \{ \nabla \}^T & \{ u \} & + & \{ \nabla \} & \{ u \}^T & \{ \nabla \} & + & \lambda \{ \nabla \} \theta & + & \{ \rho \} & = & \{ 0 \} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \{ \nabla \} & \{ \nabla \}^T = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & + & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & + & \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \end{matrix} \quad \text{de modo que}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \{ \nabla \} & \{ u \}^T = & \frac{\partial u}{\partial x} & + & \frac{\partial v}{\partial y} & + & \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \{ e \} = \theta \end{matrix} \quad \{4.5\}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ \Delta \{ u \} & + & \theta \{ \nabla \} & + & \lambda \{ \nabla \} \theta & + & \{ \rho \} & = & \{ 0 \} \end{matrix}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad \text{por lo que, en definitiva}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ (G + \lambda) \{ \nabla \} \theta & + & G \Delta \{ u \} & + & \{ \rho \} & = & \{ 0 \} \end{matrix} \quad \{9.1\}$$

De este modo las tres ecuaciones de equilibrio en el interior del cuerpo {1.1} constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales completo para las que el conocimiento de las tensiones en la superficie límite {2.1} (las fuerzas externas de superficie), o sus movimientos (los de las sustentaciones) constituyen condiciones de contorno suficientes.

9.1 SOLUCION DEL PROBLEMA ELASTICO.

El problema puede resolverse a partir de aquí por dos grandes vías.

a) Utilizando las ecuaciones en la forma en que se hallan planteadas, y describiendo todas las incógnitas en términos de un grupo reducido de ellas.

a.1) En función sólo de los movimientos {u}.

$$(G+\lambda)\{\nabla\}\theta+G\Delta\{u\}+\{\rho\}=\{0\} \quad \{9.1\}$$

a.2) Se trata de expresar las ecuaciones de equilibrio {1.1} y las de compatibilidad {3.2} o {3.3} en función de las tensiones $\{\tau\}$. En tres dimensiones es clásico escribir en función de $\{\tau\}$ las {3.2} y {3.3} utilizando las {1.1} como condiciones "de contorno" adicionales.

Si consideramos el caso de estados planos de tensión y fuerzas de masa nula:

$$\{1.1\} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad + \quad \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}$$

$$\{1.1\} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad + \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

$$\{3.1\} \quad \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{2G} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

Por {7.2}:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right)$$

$$\text{Y como: } \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{-(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{Restando obtenemos: } 0 = \frac{1+\nu}{E} \Delta(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\nu}{E} \Delta s$$

$$\text{Es decir: } \Delta s = 0$$

$$\text{que con: } \{\nabla\}\{\tau\} = 0$$

{9.2}

Constituye un sistema completo para resolver el estado, con las condiciones de contorno ya descritas.

a.2) En función de las tensiones $\{\tau\}$. {9.2}

(Es usar el equilibrio en su "forma fuerte").

En los casos de estado plano se resuelve a veces el problema buscando una función (función de TENSION o función de Airy) de la que se obtienen las tensiones en la forma:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \quad \{9.3\}$$

De esta forma se obtiene automáticamente el equilibrio, bastando, para que se cumpla la compatibilidad, que $\Delta s = 0$. Pero $\Delta s = \Delta \Delta A$, luego:

$$\Delta \Delta A = 0 \quad \{9.4\} \quad , \text{ es decir, que sea biarmónica.}$$

Se busca $A(x,y)$ que cumpla las condiciones de contorno.

b) Transformando las ecuaciones de equilibrio en base al concepto de energía, y planteando el equilibrio en términos energéticos. Será la vía abordada en el tema 11 y en ella se plantea la llamada "forma débil" del equilibrio.

ELEMENTO TRIANGULAR.

* Sea un triángulo equilátero de lado 1. Supongamos:

$$|u, v| = |ax+by+c, dx+ey+f|$$

Si no hay fuerzas de masa el sistema {9.1} impli-

ca:

$$(G + \lambda)\{\nabla\}\theta + G\Delta\{u\} = \{0\}$$

$$\text{En este caso } \Delta\{u\} = \{0\}$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a + e = \text{cte } \{\nabla\}\theta = \{0\}$$

Se cumple equilibrio interior y compatibilidad.

Supongamos conocidos los movimientos de los vértices. Tenemos 6 ecuaciones con 6 coeficientes incógnita.

$$(i) \quad |u_1 \ v_1| = \left| -a\frac{1}{2} + c, -d\frac{1}{2} + f \right|$$

$$(ii) \quad |u_2 \ v_2| = \left| b\frac{\sqrt{3}}{2} + c, e\frac{\sqrt{3}}{2} + f \right|$$

$$(iii) \quad |u_3 \ v_3| = \left| a\frac{1}{2} + c, d\frac{1}{2} + f \right|$$

Sumando (i) e (iii) obtenemos:

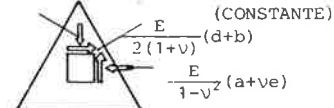
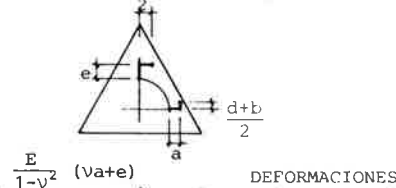
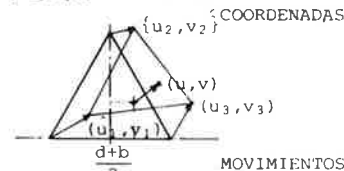
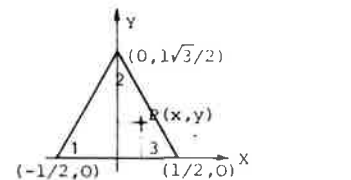
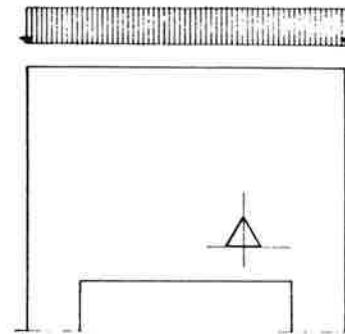
$$c = \frac{u_1 + u_3}{2} \quad f = \frac{v_1 + v_3}{2}$$

Restando (i) de (iii):

$$a = \frac{u_3 - u_1}{1} \quad d = \frac{v_3 - v_1}{1}$$

De (ii) despejamos b y e:

$$b = \frac{2u_2 - u_1 - u_3}{1/\sqrt{3}} \quad e = \frac{2v_2 - v_1 - v_3}{1/\sqrt{3}}$$



9.2 LA SOLUCION DEL PROBLEMA ELASTICO: APLICACIONES.

Las ecuaciones obtenidas en la solución del problema elástico, {9.1} así como las {9.2} no permiten resolver en general el problema elástico: no puede hallarse una solución general al sistema (en derivadas parciales de 2º orden), solución general que con la aplicación de las condiciones de contorno permitiría conocer la solución particular de cada problema.

Pero sí pueden utilizarse para el estudio de problemas particulares mediante el llamado "Método Semiinverso", debido a Saint-Venant.

El método consiste, en suma, en suponer una forma concreta (y relativamente restringida) para las funciones buscadas, comprobar mediante las ecuaciones halladas que se cumplen las condiciones de equilibrio y compatibilidad, y determinar las funciones (sus parámetros y sus coeficientes) de modo que cumplan las condiciones de contorno.

Veamos varios ejemplos.

9.2.1 ELEMENTO TRIANGULAR PLANO.

Imaginemos una porción triangular (un elemento) de estructura plana, e intentemos determinar su estado (movimiento, tensión, deformación). Para ello suponemos una forma polinómica para los desplazamientos {u}. *

De dichas expresiones para los movimientos podemos derivar el estado de deformaciones y tensiones tras comprobar que se dan las condiciones de equilibrio interno.

Conocemos, pues, $|u \ v|$ a partir de los $|u_i \ v_i|$ y podemos derivar $\{\epsilon\}$ y $\{\tau\}$.

Por ejemplo:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{u_3 - u_1}{1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{vmatrix}$$

que puede escribirse: $\{\epsilon\} = [B] \{a\}$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & \nu E & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \equiv \{\sigma\}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D] [B] \{a\}$$

ADVERTENCIA: $\{\sigma\}$ expresa los valores de $\{\tau\}$ ordenados en forma de vector columna, y en la misma forma, la columna $\{\epsilon\}$ expresa los valores de $\{\epsilon\}$

Si partimos de $\sigma_x = -\frac{M}{I} y$, por las ecuaciones de equilibrio podemos derivar las otras tensiones.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ; \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial M}{\partial x} \frac{y}{I} = -\frac{T}{I} y$$

$$\tau_{xy} = \int dy \left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) = \int dy \left(+\frac{T}{I} y \right) = \frac{+T}{2I} (y^2 - (\frac{h}{2})^2)$$

(Se obtiene la constante de integración para que $\tau_{xy}=0$ en $\pm h/2$).

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

$$\sigma_y = \int dy \left(-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) = \frac{+q}{2I} \left(\frac{1}{3} (y^3 - (\frac{h}{2})^3) - (\frac{h}{2})^2 (y - \frac{h}{2}) \right)$$

(Al ser $\sigma_y=0$ para $y = \frac{h}{2}$: $T=\text{cortante} = \frac{\partial M}{\partial x}$; $q=\text{carga} = -\frac{\partial T}{\partial x}$)

COMPATIBILIDAD: $\Delta S=0$

$$\Delta S = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{+q}{I} y + \frac{q}{I} y = \frac{+2q}{I} y \neq 0$$

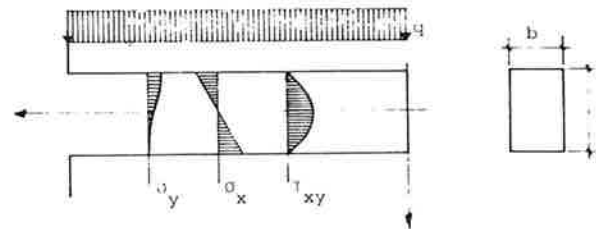
Para lograr la compatibilidad es preciso añadir a σ_x un término independiente de x (para no alterar el equilibrio, ni τ), y cuya derivada segunda respecto de y valga $-\frac{2q}{I} y$. Este término sería $-\frac{qy^3}{3I}$, pero añadiendo sólo esto alteramos el equilibrio de momentos. Se altera el momento en:

$$\Delta M = -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{qy^3}{3I} b y dy = -\frac{qh^2}{20}$$

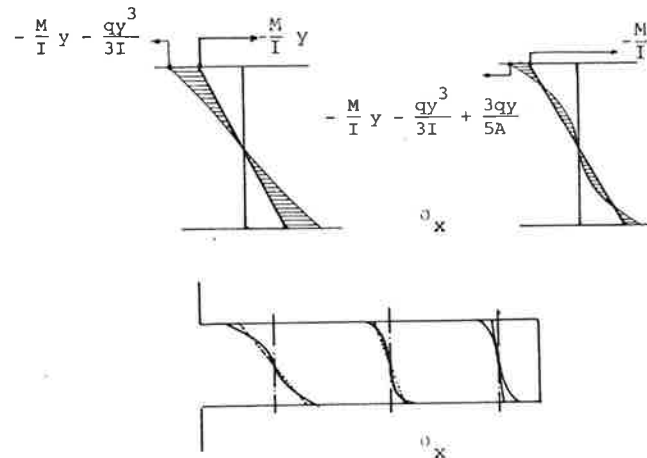
por lo que debe añadirse un término lineal en y que recupere ΔM .

$$\Delta M = \int_{-h/2}^{h/2} k y b y dy = \frac{qh^2}{20} \rightarrow k y = \frac{3}{5} \frac{q}{A} y$$

De este modo obtenemos las tres componentes del tensor de tensión que cumplen las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad. {9.5}



¿VALE HIPÓTESIS DE NAVIER?



9.2.2 MENSULA CON CARGA UNIFORME.

Con las expresiones obtenidas verificaremos si son correctos los resultados derivados de la hipótesis de NAVIER.

Según ella tenemos: $\sigma_x = -\frac{M}{I} y$ ($M=\text{Momento}$)

Pueden obtenerse a partir de ésta el resto de las componentes de tensión por las ecuaciones de equilibrio, pero resultan incompatibles: no hay compatibilidad de deformaciones al no cumplirse $\Delta S=0$.

El cumplir las condiciones de compatibilidad lleva a una ley de tensiones no lineal para σ_x .

$$\sigma_x = -\frac{M}{I} y + \frac{3}{5} \frac{q}{A} y - \frac{qy^3}{3I}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{2I} (y^2 - (\frac{h}{2})^2)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} (y^3 - (\frac{h}{2})^3) + (\frac{h}{2}) (y - \frac{h}{2}) \right) \quad \{9.5\}$$

No vale la hipótesis de NAVIER en este caso.

Podemos dar a σ_x una forma que permita visualizar el grado de alteración respecto de la ley lineal escribiendo todos los términos como expresión de la carga y de las características de la geometría de la pieza.

$$\sigma_x = \frac{qI^2}{2I} y - \frac{q(h/2)^2}{2I} \frac{2}{5} y + \frac{qy^2}{2I} \frac{2}{3} y$$

Se observa que los términos requeridos por la compatibilidad son relevantes en piezas de dimensiones longitudinales y transversales comparables.

* Hallamos la función de Airy.

Puesto que $\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ que creemos es lineal con x e y

$\sigma_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ que pensamos es nula

ensayamos una función A de la forma:

F. Airy: $A = x(ry^3 + sy^2 + ty)$

Tensiones: $\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 6rxy + 2sx$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 A}{\partial x \partial y} = -(3ry^2 + 2sy + t)$

Cumplen el equilibrio.

Compatibilidad: Basta que $\Delta \Delta A = 0$, como así es.

Condiciones de contorno.

- En bordes superior e inferior ($\pm \frac{h}{2}$) no hay cargas.

$\sigma_y = 0$ Se cumple.

$\tau_{xy} = 0 \quad -(3r(\frac{h}{2})^2 + 2s\frac{h}{2} + t) = 0$

luego $s = 0$; $t = 3r(\frac{h}{2})^2$

- En borde derecho ($x=0$):

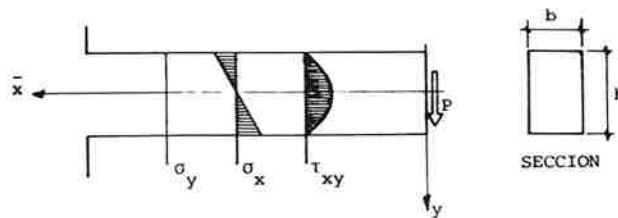
no hay carga horizontal; $\sigma_x = 0$ Se cumple
las tensiones verticales suman P;

$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} b dy + P = 0$

$P = -\int_{-h/2}^{h/2} (-3ry^2 - 3r(\frac{h}{2})^2) b dy = 3rb(\frac{y^3}{3} - (\frac{h}{2})^2 y)_{-h/2}^{h/2}$

$P = \frac{-h^3 rb}{2} \quad r = \frac{-2P}{h^3 b} = \frac{-P}{6I} = \frac{-P}{2 \cdot \frac{1}{3} b (\frac{h}{2})^3}$

obtenidas r, s y t pueden escribirse las tensiones.



¿VALE HIPOTESIS DE NAVIER?

9.2.3 MENSULA CON CARGA PUNTUAL.

A partir de la Hipótesis de Navier (la sección plana se mantiene plana tras la deformación) las tensiones que se obtienen son:

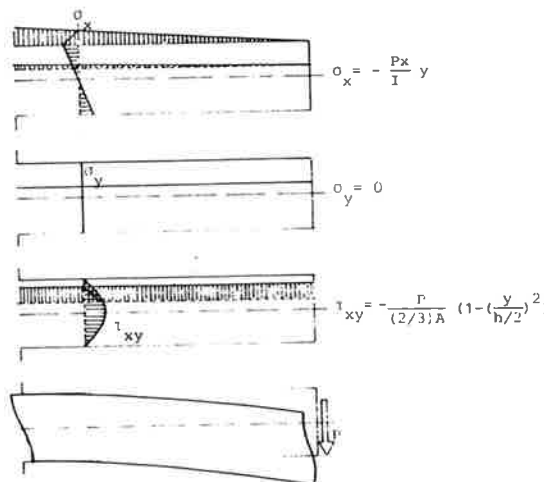
$$\sigma_x = -Pxy / I ; \sigma_y = 0 ; \tau_{xy} = \frac{-P}{2 \cdot \frac{1}{3} A} (1 - (\frac{y}{h/2})^2)$$

(Ley lineal de tensión normal y parabólica de tensión tangencial).

Podemos ahora verificar si es correcta la hipótesis y la deducción.

Para ello tratamos de hallar una FUNCION DE AIRY para este problema, de la que podamos derivar $\{\tau\}$, $\{\sigma\}$, $\{u\}$, y que cumpla las condiciones de tensión y movimiento en el contorno. *

El análisis muestra que los resultados que se obtienen para las tensiones, mediante la Hipótesis de Navier, son adecuados, pese a que, de hecho, las secciones no se mantienen planas en la deformación; es decir, en este caso la hipótesis no es cierta pero lo que se deduce de ella sí lo es, debido a la distorsión no plana de la sección, debida al cortante, se mantiene constante en todas las secciones.



Las tensiones son las de la hipótesis de NAVIER

$$\epsilon_x = \frac{-Px}{EI} y = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u = \frac{-Px^2}{2EI} y + f_2(y)$$

$$\epsilon_y = \frac{UPx}{EI} y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad v = \frac{UPx}{2EI} y^2 + f_1(x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{-P}{G \frac{2}{3} A} \left(1 - \left(\frac{y}{h/2}\right)^2\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-Px^2}{2EI} + f_2'(y) + \frac{UPy^2}{2EI} + f_1'(x)$$

Separando e integrando:

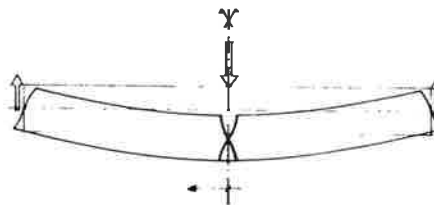
$$f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + c_1 x + c_2$$

$$f_2(y) = \frac{-UPy^3}{6EI} - \frac{P}{G \frac{2}{3} A} \left(y - \frac{y^3}{3(h/2)^2}\right) - c_1 y + c_3$$

En el contorno: $x=l$ e $y=0$, $u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ permiten determinar c_1, c_2, c_3 .

$$u = \frac{Pl^2}{2EI} y \left(1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right) - \frac{h^2}{21} (1+v) + \frac{Py^3}{3EI} \left(1 + \frac{v}{2}\right)$$

$$v = \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{P}{EI} \left(\frac{l^2 x}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{vP}{2EI} xy^2$$



El análisis de los movimientos muestra una incompatibilidad local en la sustentación (piénsese en una viga apoyada con carga en el centro, que es igual a dos ménsulas invertidas, y considérese las acciones bajo la carga).

Esto implica que, al menos en las proximidades de los puntos de aplicación de las cargas y de los apoyos las leyes de tensiones obtenidas no son válidas, al depender de la forma de aplicar la carga.

Puede, empero, admitirse el PRINCIPIO DE SAINT-VENANT que dice que este efecto es sólo local (afecta a zonas de dimensiones del orden de las dimensiones transversales de la pieza), mientras que en el resto de la pieza no dependen las tensiones más que de las resultantes sobre la sección considerada.

TORSION. SECCION HUECA.

* Si aislamos un elemento de pieza por equilibrio de fuerzas en el sentido z resulta: (fig.1)

$$\tau e dz = \tau' e' dz \rightarrow \tau e = \text{cte}$$

** Si el momento torsor es M:

$$M = \int \tau e ds r = \int \tau e 2 dA r = 2 \int \tau e A$$

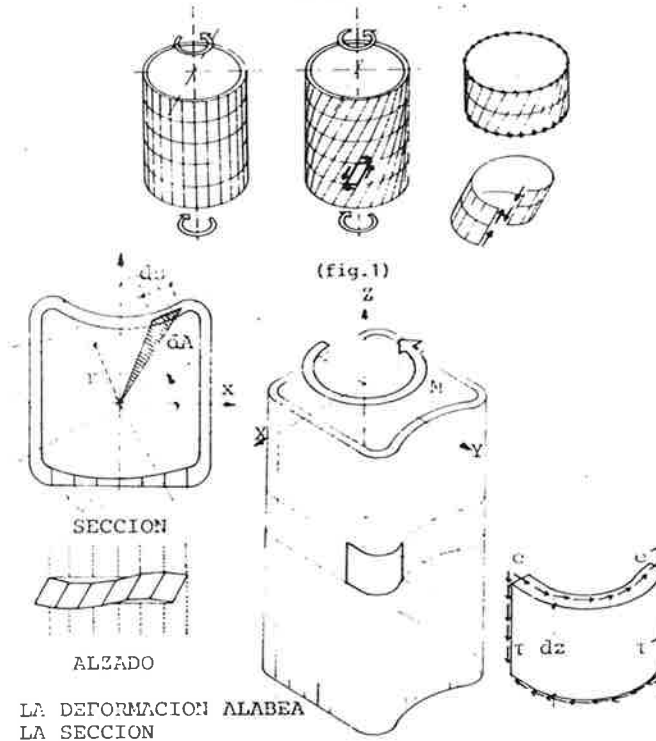
$$\tau = \frac{M}{2Ae} \quad A \text{ es el \u00e1rea encerrada por la direcc\u00edon de la secci\u00f3n.}$$

Para obtener el giro por unidad de longitud de la pieza, igualamos energ\u00eda exterior e interior.

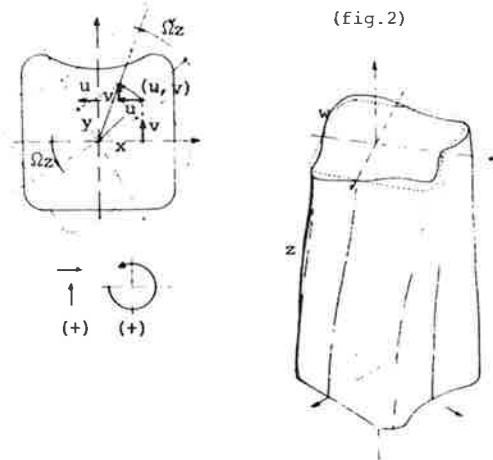
$$\frac{1}{2} M \Omega = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dv = \frac{1}{2} \oint \tau \frac{ds}{G} l e ds = \frac{1}{2} \frac{M^2}{4GA^2} \oint \frac{ds}{e}$$

$$\Omega = \frac{M}{4GA^2} \oint \frac{ds}{e}$$

ESTADO DE TENSION FUERA DEL PLANO DE LA SECCION



LA DEFORMACION ALABEA LA SECCION



TORSION UNIFORME

10.1 EL PROBLEMA DE LA TORSION.

Con los m\u00e9todos expuestos puede abordarse el problema de la torsion.

Para entender el problema supongamos inicialmente una secci\u00f3n hueca, donde cada punto se halla sometido a un estado de tensi\u00f3n tangencial en los planos que definen la pared de la pieza en el punto. *

Siendo constante el producto τe , y siendo variable el espesor e , la tensi\u00f3n τ es variable en cada zona de la pieza, y var\u00eda por tanto la distorsi\u00f3n, por lo que necesariamente la secci\u00f3n se alabea, se sale de su plano.

Si el momento es constante a lo largo de la longitud de la pieza, el alabeo es constante, y si no hay coacci\u00f3n al mismo, la tensi\u00f3n y el giro unitario valen: **

$$\tau = \frac{M}{2Ae} \quad ; \quad \Omega = \frac{M}{4GA^2} \oint \frac{ds}{e} \quad \{10.1\}$$

10.2 TORSION. SECCION MACIZA.

Supongamos una pieza de secci\u00f3n maciza sometida a un momento constante y sin coacci\u00f3n al alabeo. Suponemos los ejes situados en el centro de torsion (punto alrededor del que gira la secci\u00f3n, que determinaremos m\u00e1s adelante). Sean los movimientos de cada punto $\{u\} = \{u, v, w\}$

$$\begin{aligned} u &= -\Omega zy \\ v &= \Omega zx \\ w &= \Omega \phi(x, y) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{Seg\u00fan el giro de la secci\u00f3n. (fig.2)} \\ &\text{(El alabeo es funci\u00f3n de las coordenadas } x, y \text{ del punto y no depende de } z \text{ al ser } \frac{\partial M}{\partial z} = 0). \end{aligned}$$

Obtenemos las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para las tensiones derivadas de esta hip\u00f3tesis de desplazamientos: ***

TORSION. SECCION MACIZA SIN COACCION AL ALABEO.

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega zy \\ \Omega zx \\ \Omega \phi(x, y) \end{bmatrix} \quad \text{Por lo que por \{3.1\} y por}$$

$$\{7.4\}: \quad \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G (\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Omega y)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G (\Omega \frac{\partial \phi}{\partial y} + \Omega x)$$

Es un estado de tensi\u00f3n que permite la compatibilidad de deformaciones al haber sido derivado de un campo de desplazamientos continuo $\{u\}$. Derivando las τ para eliminar ϕ : $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 2G\Omega$ {10.2} Expresa la condici\u00f3n de compatibilidad.

Por las ecuaciones de equilibrio {1.1}:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \{10.3\}$$

* I) Hallar la función de tensión $\psi(x,y)$ tal que:

$$\tau_{xz} = G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \tau_{yz} = -G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \{10.4\}$$

Con lo que automáticamente se cumple el equilibrio.

II) Cumplir la compatibilidad {10.2} supone:

$$-G\Omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - G\Omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2G\Omega ; \text{ o sea: } \Delta \psi = -2 \quad \{10.5\}$$

III) En el contorno las tensiones son nulas.

$$\{\tau_\alpha\} = \{v_\alpha\} \{\tau\} = \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & -\frac{dx}{ds} & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = G\Omega \frac{d\psi}{ds} = 0$$

Es decir, en el contorno $\psi_s = \text{cte}$. Como sólo interesan las derivadas de ψ : $\psi_s = 0 \quad \{10.6\}$

Resultante nula en caras extremas:

$$0 = \iint \tau_{zx} dx dy = G\Omega \iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = G\Omega \oint \psi v_y dc = 0$$

$$0 = \iint \tau_{yz} dx dy = -G\Omega \iint \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = -G\Omega \oint \psi v_x dc = 0$$

Momento torsor M en caras extremas:

$$M = \iint dx dy (-\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) = -G\Omega \iint \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} y + \frac{\partial \psi}{\partial x} x \right) dx dy$$

$$M = -G\Omega \left(\iint dx \frac{\partial \psi}{\partial y} y dy + \iint dy \frac{\partial \psi}{\partial x} x dx \right), \text{ y por (NOTA)}$$

$$M = -G\Omega \left(\oint \psi y dx + \oint \psi x dy - \iint dx \psi dy - \iint dy \psi dx \right)$$

$$M = 2G\Omega \iint \psi dx dy \quad \{10.7\}$$

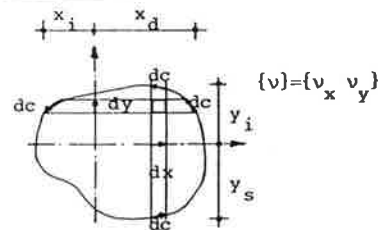
NOTA: integración por partes en superficies cerradas.

$$\iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \int dy ((\psi \phi)_{x_d} - (\psi \phi)_{x_i}) - \iint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy$$

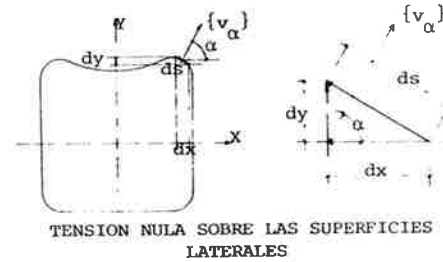
y como $dy = v_x dc$ en x_d y $dy = -v_x dc$ en x_i

$$\iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \oint \psi \phi v_x dc - \iint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy$$

$$\iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = \oint \psi \phi v_y dc - \iint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy$$



$$\begin{aligned} x_d : v_x &= dy/dc \\ x_i : v_x &= -dy/dc \\ y_s : v_y &= -dx/dc \\ y_i : v_y &= dx/dc \end{aligned}$$



El estado de tensión es $\{\tau\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$

cumpliéndose

las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 2G\Omega \end{cases}$$

Para establecer las tensiones que:

a) cumplen las ecuaciones citadas

b) cumplen las condiciones en el contorno

I) Buscamos una función de tensión $\psi(x,y)$ de la que se deriven tensiones que cumplan automáticamente el equilibrio (al igual que hacíamos con la función de Airy para estados planos).

$$\tau_{xz} = G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad \tau_{yz} = -G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \{10.4\}$$

El centro de torsión (de tensión nula) se hallará en un máximo de ψ .

II) Debe cumplirse la compatibilidad $\Delta \psi = -2$ {10.5}

III) Las condiciones de contorno en este caso son:

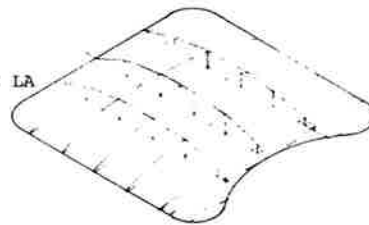
*Tensión nula en las superficies laterales de la pieza. $\psi_s = 0$ {10.6} (Bastaría con que $\psi_s = \text{cte}$)

*Fuerza resultante de todas las tensiones en las caras extremas nula (no hay fuerza aplicada). Se cumple automáticamente.

*Momento resultante de todas las tensiones en las caras extremas igual al momento torsor aplicado sobre las mismas. Para ello basta hacer: $M = 2G\Omega \iint \psi dx dy$ {10.7}

Resolver el problema implica, pues, hallar una función ψ que verifique {10.4} a {10.7}.

ANALOGIA DE LA MEMBRANA



$$\psi = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$1) \Delta \psi = C \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = -2$$

$$C \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2$$

$$C = - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

2) $\psi_c = 0$, pues en el contorno los puntos x, y cumplen

$$\text{la ecuación de la elipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$M = 2G\theta \iint \psi \, dx \, dy$$

$$M = \frac{-2a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left(\frac{1}{2} \iint x^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \iint y^2 \, dx \, dy - \iint dx \, dy \right)$$

$$M = \frac{-2a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left(\frac{I_x}{a^2} + \frac{I_y}{b^2} - A \right) = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} G\theta$$

$$\text{pues } I_x = \pi \frac{a^3 b}{4}; \quad I_y = \pi \frac{ab^3}{4}; \quad A = \pi ab$$

Las tensiones se obtienen sin dificultad.

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{M}{\pi \frac{a^2 + b^2}{3}} \left(\frac{-2ab^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{2y}{b^2} = - \frac{2M}{\pi ab^3} y$$

Si imaginamos una gráfica tridimensional en que los ejes son x, y, ψ (a cada punto x, y se asocia $\psi(x, y)$ dibujado en la tercera dimensión), ψ describe una superficie que se apoya en el contorno de la sección, que encierra con el plano $\psi=0$ un volumen que constituye el módulo de torsión I_T , y cuyas pendientes sirven de medida a las tensiones. Puesto que la ecuación {10.5} es idéntica a la de la deformación de una membrana tensa sometida a presión uniforme puede establecerse una analogía que sirve de base a la medida experimental de las tensiones.

10.22 TORSION. SECCION ELIPTICA.

Sea una elipse de semiejes a, b sometida a un momento torsor M .

Tomando ejes en el centro de la elipse que corresponderá al máximo de la membrana sometida a presión y ajustada al borde de la sección) podemos escribir la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Probamos como función de tensión:

$$\psi = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad *$$

- De ella podemos deducir τ_{xz}, τ_{yz} , pues:

1) Cumple la condición de compatibilidad sin más que hacer:

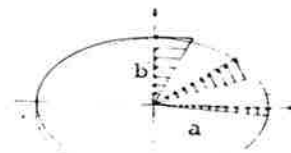
$$C = \frac{-a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

2) Cumple las condiciones de contorno:

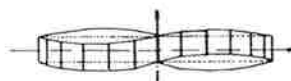
$$\psi_c = 0, \text{ y resulta } \frac{M}{\Omega} = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} G$$

$$\text{Por tanto: } \tau_{xz} = \frac{-2M}{\pi ab^3} y; \quad \tau_{yz} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x$$

$$\text{y la tensión máxima es: } \tau_{\max} = \frac{2M}{\pi ab^2}$$



PLANTA (TENSIONES)



ALZADO LATERAL (ALABEO)

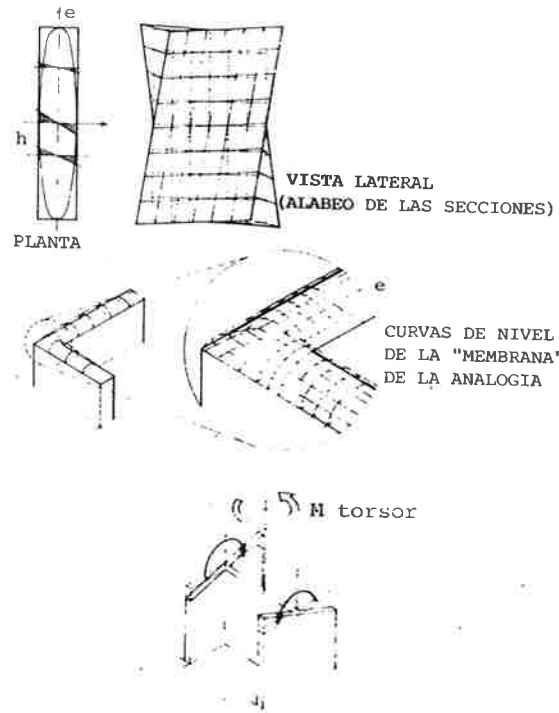
SECCION RECTANGULAR ESTRECHA.

Si en la elipse $\frac{a}{b} \rightarrow 0$; $\psi \rightarrow \frac{c}{2} (x^2 - a^2)$ tomamos $\psi = \frac{e^2}{4} - x^2$, que cumple las condiciones de contorno, salvo en los lados menores.

$$\tau_{yz} = -G\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2G\Omega x; \quad \tau_{xz} = 0$$

$$M = 2G\Omega \iint \psi \, dx \, dy = 2G\Omega \frac{e^2}{4} eh - 2G\Omega \frac{e^3 h}{12} = G\Omega \frac{e^3 h}{3}$$

Factor de concentración: $k \approx 1.74 \sqrt{\frac{e}{\rho}}$
determinado experimentalmente



1023 TORSION. SECCION ESTRECHA.

Se obtiene con facilidad una ley lineal para $\tau_{yz} = \frac{6M}{e^3 h} x$

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{e^2 h} \quad (\text{válida si } h \geq 5e)$$

$$\frac{M}{\Omega} = G \frac{e^3 h}{3}$$

Para perfiles abiertos, la analogía de la membrana muestra que la rigidez frente a la torsión es aproximadamente la de la suma de los rectángulos que forman la sección, y las tensiones las de éstas, salvo en los vértices concavos en que se producen grandes concentraciones.

En el caso de torsión no uniforme, las expresiones anteriores exigirían alabeo variable en secciones consecutivas, lo que de hecho implica que existe coacción mutua al alabeo,

Las expresiones no son válidas si hay coacción al alabeo; en este caso es evidente que entran en juego tensiones normales σ_z .

ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMACION

11.0 TRABAJO. ENERGIA POTENCIAL.

$$* \quad dw = F \, dx$$

$$w = \int F \, dx$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F$$

** Sea un punto sometido a fuerzas que sólo dependen de la posición (2 resortes).

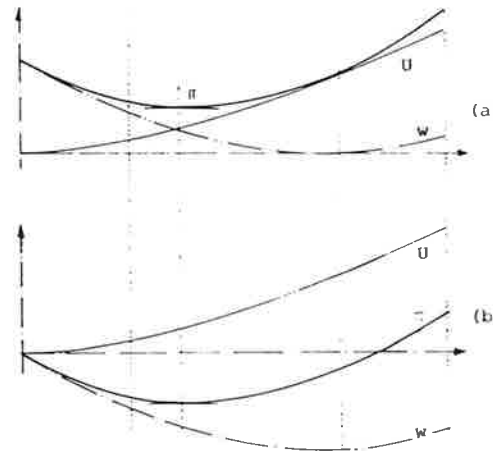
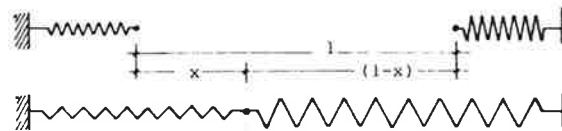
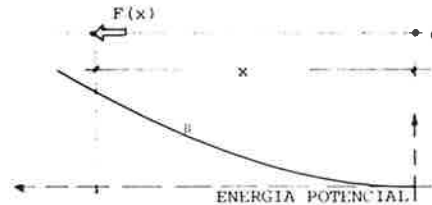
$$F_i = k_1 x \quad U = k_1 \frac{x^2}{2}$$

$$F_e = -k_2 (1-x) \quad w = k_2 \frac{(1-x)^2}{2}$$

Energía: $\pi = U + w$

$$\text{Derivada: } \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = F_i + F_e$$

$$\text{Diferencial: } d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial x} dx = F_i dx + F_e dx$$



Cuando un punto material se halla sometido a la acción de una fuerza y se desplaza en la dirección de ésta, se dice que la fuerza realiza un trabajo.

$$w = \int F \, dx$$

(El valor de la fuerza es, pues, la derivada del trabajo respecto del desplazamiento). (1) *

Si el valor de la fuerza sólo depende de la posición, puede medirse en cada una de las posiciones posibles el trabajo que se desarrollaría al llevar el punto material desde dicha posición a un punto dado.

Ese trabajo se denomina energía potencial del punto material en esa posición respecto del punto de referencia.

Si el punto se halla sometido a varios sistemas de fuerzas, puede considerarse separadamente la energía de cada sistema, y la energía potencial total será la suma de todas ellas.

(En este caso es usual tomar un mismo punto como origen para todos los sistemas). (**)

(1) En nuestra visión del problema, fuerza y movimiento son los conceptos primarios, aun cuando no siempre ha sido así: para Descartes el concepto primario "FUERZA" equivale a nuestro concepto de trabajo, obteniéndose las 'fuerzas' (pesos, etc...) por 'derivación' respecto al espacio.

EQUILIBRIO:

* Suma de fuerzas nula: $F_i + F_e = 0$

Trabajo "virtual" nulo: $F_i dx + F_e dx = 0$

Energía estacionaria (1): $\frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$

Sea un peso sostenido por el vacío de dos émbolos.

$$\frac{1}{2} \pi = Fa - Fb = Fl(1 - \cos \alpha) - Fl \sin \alpha$$

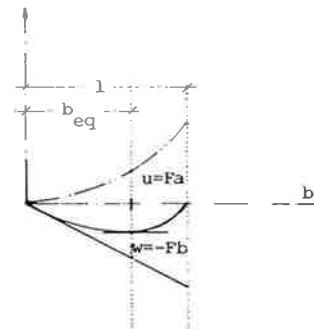
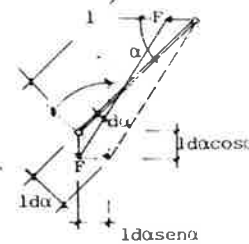
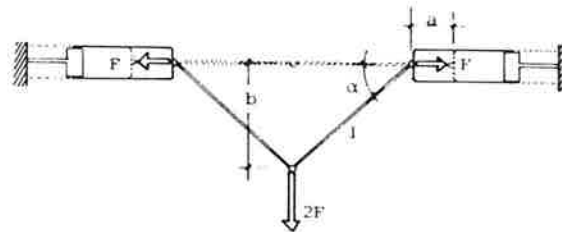
EQUILIBRIO:

Suma de fuerzas: $\frac{F}{\cos \alpha} - \frac{F}{\sin \alpha} = 0$

Trabajo virtual: $-Fl d\alpha \sin \alpha + Fl d\alpha \cos \alpha = 0$

Energía estacionaria (1): $\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} = Fl \sin \alpha - Fl \cos \alpha = 0$

(1) mínima, máxima o constante, correspondiendo a equilibrios estable, inestable o indiferente.



11.1 EQUILIBRIO. PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.

La condición de equilibrio puede establecerse de diversas formas, todas ellas equivalentes: *

Equilibrio = suma de fuerzas nula.

Equilibrio = trabajo virtual nulo.

(trabajo desarrollado al apartarse infinitesimalmente de la posición de equilibrio, igual a cero).

Equilibrio = energía estacionaria.

(Como en estructuras interesan equilibrios estables suele decirse que equilibrio = energía mínima).

En sistemas deformables el anterior principio es igualmente válido, como se demuestra rigurosamente en la página siguiente, de modo que pueden analizarse las situaciones de equilibrio estructural considerando la energía potencial total (energía potencial de las cargas más energía de deformación).

Además, este principio supone una potente herramienta para establecer métodos de cálculo (exactos o aproximados).

EQUIVALENCIA:

EQUILIBRIO (SUMA DE FUERZAS NULA).

TRABAJO VIRTUAL NULO.

ENERGIA MINIMA.

Sea una estructura en equilibrio. En todo punto de ella se verifica:

$\{V\}\{\tau\} + \{\rho\} = \{0\}$, y por tanto, si imaginamos un campo de desplazamientos $\{\bar{u}\}$ (virtual o infinitesimal) arbitrario compatible con las condiciones de contorno (que supone una deformación virtual $\{\bar{e}\}$ en cada punto):

$$\{V\}\{\tau\}\{\bar{u}\}^T + \{\rho\}\{\bar{u}\}^T = \{0\}\{\bar{u}\}^T = 0$$

y al ser cierto en todo punto, también:

$$\int_V dv (\{V\}\{\tau\}\{\bar{u}\}^T + \{\rho\}\{\bar{u}\}^T) = 0$$

$$\int_V dv \left(\frac{\partial}{\partial x} \{\tau_x\} + \frac{\partial}{\partial y} \{\tau_y\} + \frac{\partial}{\partial z} \{\tau_z\} \right) \{\bar{u}\}^T + \int_V dv \{\rho\}\{\bar{u}\}^T = 0$$

e integrando por partes el primer sumando:

$$\int_S ds (\alpha_{nx} \{\tau_x\} + \alpha_{ny} \{\tau_y\} + \alpha_{nz} \{\tau_z\}) \{\bar{u}\}^T - \int_V dv (\{\tau_x\} \frac{\partial}{\partial x} \{\bar{u}\}^T + \{\tau_y\} \frac{\partial}{\partial y} \{\bar{u}\}^T + \{\tau_z\} \frac{\partial}{\partial z} \{\bar{u}\}^T) + \int_V dv \{\rho\}\{\bar{u}\}^T = 0$$

Es decir: dado que $\{\alpha_{nx} \alpha_{ny} \alpha_{nz}\} = \{v_n\}$ es el versor de la superficie en cada punto de ésta:

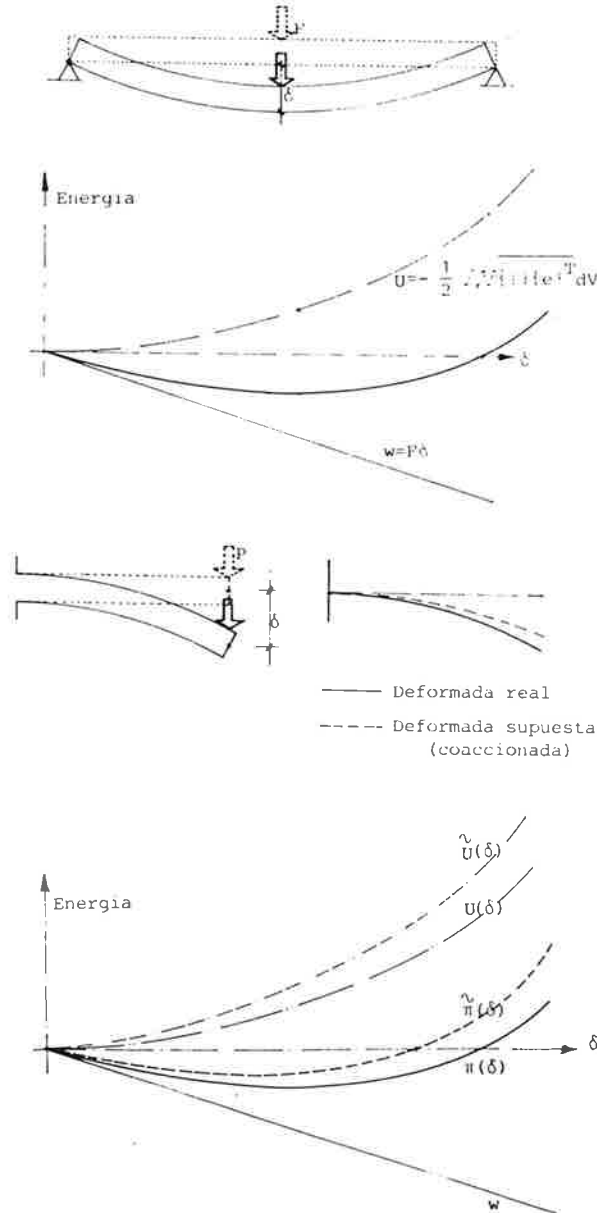
$$\int_S ds \{v_n\}\{\tau\}\{\bar{u}\}^T - \int_V dv \{\tau\}\{\bar{e}\}^T + \int_V dv \{\rho\}\{\bar{u}\}^T = 0$$

y por lo tanto:

$$\int_S ds \{v_n\}\{\tau\}\{\bar{u}\}^T - \int_V dv \{\tau\}\{\bar{e}\}^T + \int_V dv \{\rho\}\{\bar{u}\}^T = 0 \quad \{11.3\}$$

El primer término es trabajo virtual de las fuerzas exteriores, el segundo es el trabajo virtual de deformación y el tercero, el trabajo virtual de las fuerzas de masa.

El trabajo virtual total es nulo y por lo tanto la derivada de la energía (variación) respecto del campo de desplazamientos supuesto es nula. Al ser esto cierto para todo campo de desplazamiento arbitrario, la energía es estacionaria.



En efecto, si somos capaces de describir la energía total como expresión de un parámetro (de valor no conocido), haciendo mínima la energía para variaciones del parámetro podemos establecer una ecuación que permite obtener el valor del mismo en la situación de equilibrio.

Si la expresión de la energía total es: $\pi(p)$, para el equilibrio: $\frac{\partial \pi}{\partial p} = 0$ {11.1}

Análogamente, si son varios los parámetros: (p_1, p_2, \dots, p_n) , para el equilibrio:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial p_2} = 0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial p_n} = 0 \quad \{11.2\}$$

(Pueden obtenerse tantas ecuaciones como incógnitas).

Si la expresión $\pi(p)$ es correcta, se obtiene el mínimo real y la situación de equilibrio correcta.

Si la expresión es sólo aproximada, se obtiene $(\tilde{\pi}(p) \approx \pi)$, en general se deberá a haber aproximado la energía de deformación $\tilde{U}(p)$ suponiendo formas de deformación no reales.

Si el parámetro es un movimiento típico de la estructura (una flecha, ...), la energía aproximada para cada valor del mismo será mayor que la real ($\tilde{U} > U$), pues la estructura se supone más coaccionada que la real (se la "obliga" a deformarse en forma no totalmente libre).

El método que se basa en aproximar la expresión de la energía de deformación y determinar los parámetros de la aproximación haciendo mínima la energía total se conoce por el nombre Rayleigh-Ritz.

El método basado en anular el trabajo virtual total realizado al apartarse arbitraria e infinitesimalmente de la posición de equilibrio se denomina Principio de los trabajos virtuales.

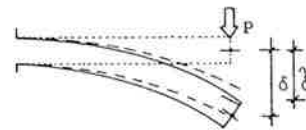
Ambos principios son totalmente generales y no exigen que el material tenga un comportamiento lineal (aunque sí que el sistema sea conservativo: no se disipa energía al modificarse la situación de equilibrio por alteración de cargas u otras causas).

En cualquier caso, el principio de los trabajos virtuales (que hemos enunciado en su forma de los desplazamientos virtuales) es de uso más generalizado, por lo que interesa prestarle mayor atención.

11.2 PRINCIPIO DE LAS FUERZAS VIRTUALES.

Supongamos una estructura cargada en equilibrio. Imaginemos que antes de someterla a la carga la hemos sometido a un sistema arbitrario de fuerzas virtuales en equilibrio (entre sí y a través de las tensiones virtuales precisas). El sistema debe estar en equilibrio, pero puede elegirse arbitrariamente.

Si posteriormente cargamos la estructura hasta su estado deformado real, las fuerzas y tensiones virtuales habrán desarrollado un trabajo que puede evaluarse, y que se demuestra que es nulo, tanto para materiales lineales como no lineales. *



* SEA UN SISTEMA DE FUERZAS VIRTUALES EN EQUILIBRIO.

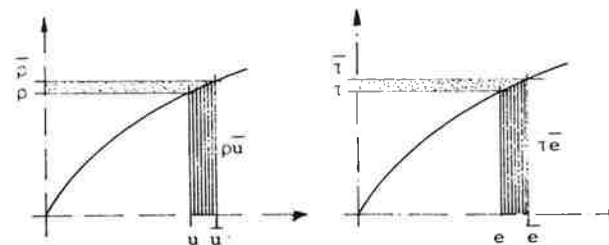
En todo punto interior: $\{V\}\{\bar{\tau}\} + \{\bar{\rho}\} = \{0\}$

Si se desplaza el campo de desplazamientos real $\{u\}$, en todo punto :

$$\{V\}\{\bar{\tau}\}\{u\}^T + \{\bar{\rho}\}\{u\} = 0$$

y podemos llegar, como en 11.3, a :

$$\int_S ds \{\bar{\tau}_n\}\{u\}^T - \int_V dv \{\bar{\tau}\}\{e\}^T + \int_V dv \{\bar{\rho}\}\{u\}^T = 0 \quad (11.4)$$



Principio de las fuerzas virtuales

Principio de los desplazamientos virtuales

* Sea una estructura cargada; para todo sistema unitario de fuerzas (virtuales) en equilibrio resulta (si se desprecian las fuerzas de masa por {11.4}):

$$\int_S ds \{\bar{t}_n\} \{u\}^T - \int_V dv \{\bar{t}\} \{e\} = 0$$

Si el sistema de fuerzas es una sola fuerza \bar{p} (y tensiones y reacciones arbitrarias que la equilibran); resulta que el primer término de la expresión se reduce a $\bar{p}\delta$ (δ = desplazamiento en la posición y dirección de \bar{p}):

$$\bar{p}\delta - \int_V dv \{\bar{t}\} \{e\} = 0$$

para $\bar{p} = 1$ resulta :

$$\delta = \int_V dv \{\bar{t}\} \{e\}$$

a) Obtención de δ :

Deformaciones reales: Curvaturas $C = \frac{M}{EI}$

(El momento en cada punto es el de la viga proyección).

Esfuerzos virtuales: $\bar{M} = 1 \cdot y = y$

$$\delta = \int \frac{M}{EI} y ds$$

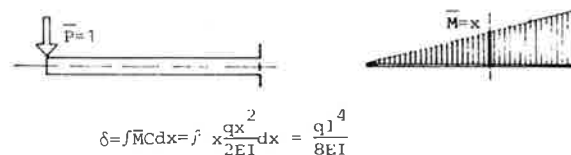
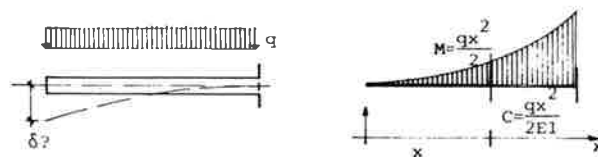
b) Obtención de H:

Deformaciones reales: $C = \frac{M}{EI} = -\frac{Hy}{EI}$

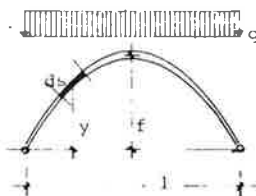
Esfuerzos virtuales: $\bar{M} = -y$

$$\delta = \int \frac{Hy^2}{EI} ds = H \int \frac{y^2}{EI} ds ; \text{ e igualando}$$

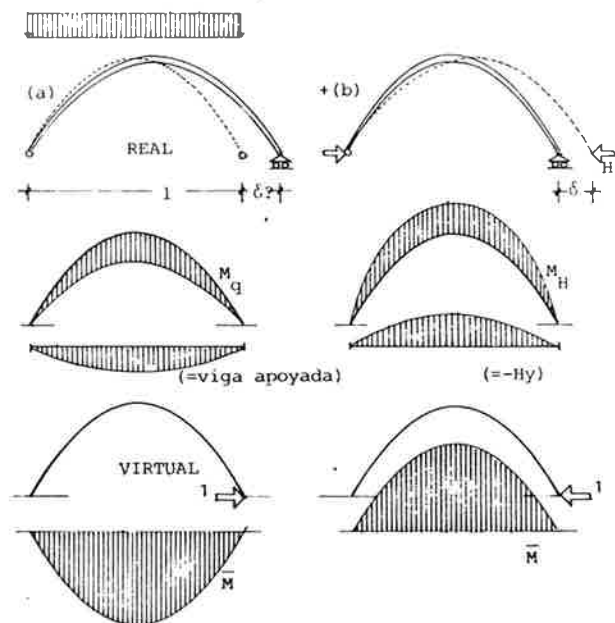
$$H = \frac{\int \frac{M}{EI} y ds}{\int \frac{y^2}{EI} ds} \quad (i)$$



$$\delta = \int \bar{M} C dx = \int_0^l x \frac{qx^2}{2EI} dx = \frac{ql^4}{8EI}$$



ARCO DIRECTRIZ CUALQUIERA



TEOREMAS DE TRABAJO. APLICACIONES

12.1 TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

a) OBTENCION DE DESPLAZAMIENTOS.

Los principios de los desplazamientos virtuales y de las fuerzas virtuales constituyen poderosas herramientas para el análisis estructural.

Si por ejemplo dada una estructura cargada queremos obtener el desplazamiento (flecha) de uno de sus puntos, podemos utilizar el principio de las fuerzas virtuales:

Aplicando una fuerza virtual unidad en la posición y dirección en que queremos hallar el desplazamiento, el trabajo de deformación añadido (producto de las deformaciones reales por las tensiones virtuales que equilibran dicha fuerza unidad) es igual a dicho desplazamiento. *

b) OBTENCION DE REACCIONES HIPERESTATICAS.

Para obtener una reacción hiperestática (p. ej. el empuje del arco articulado de la figura) pueden realizarse dos pasos:

a) Liberar la estructura de la reacción; la estructura se desplaza en el punto de apoyo; se obtiene el desplazamiento.

b) Reponer la reacción y anular el desplazamiento producido en el paso anterior; se obtiene la reacción.

En cada uno de dichos pasos se formula el desplazamiento como en el caso anterior. **

* Para directriz semicircular, sección constante y carga uniforme ($r = L/2$):

$$M_q = \frac{qL^2}{8} - \frac{qx^2}{2} = q \frac{L^2}{8} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) = \frac{qL^2}{8} (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$M_H = -r \sin \alpha \cdot H$$

$$H = \frac{\left(\frac{1}{EI} \int \frac{L^2}{8} (1 - \cos^2 \alpha) \cdot r \sin \alpha \cdot r d\alpha\right)}{\left(\frac{1}{EI} \int r^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r d\alpha\right)}$$

$$H = \frac{qL^2}{8r} \left(\frac{\int (1 - \cos^2 \alpha) \sin \alpha d\alpha}{\int \sin^2 \alpha d\alpha} \right) =$$

$$= \frac{2}{3\pi} qL$$

** Arco en rotura:

Analizamos la geometría del desplazamiento en rotura para un descenso δ en la clave:

-Trabajo de cargas:

$$0,71q \frac{L}{2} \left(\frac{\delta - 0,2\delta}{2} \right) = 0,29q \frac{L}{2} \left(\frac{0,2}{2} \delta \right)$$

-Trabajo de rótulas:

$$M \left(\frac{0,54\delta}{0,76 \frac{L}{2}} \right) + M \left(\frac{0,54\delta + 1,3\delta}{0,76 \frac{L}{2}} \right) + M \left(\frac{1,3\delta}{0,76 \frac{L}{2}} \right)$$

por lo tanto $M = 0,0132 qL^2 \approx \frac{qL^2}{76}$

RAYLEIGH-RITZ

Suponemos como expresión de los descensos:

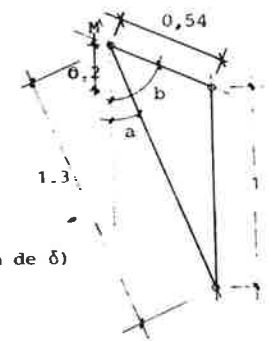
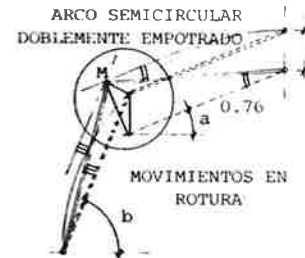
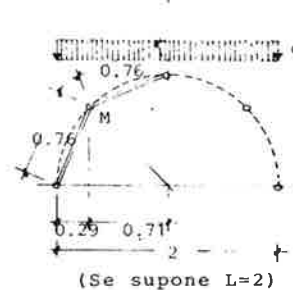
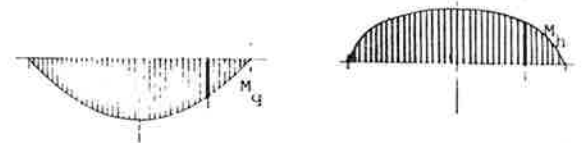
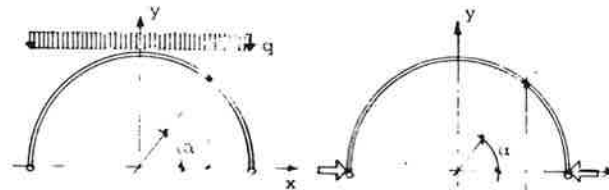
$$v \approx fx^2/L^2 \quad (\text{el parámetro } f \text{ es desconocido})$$

La curvatura y los momentos se aproximan:

$$C = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \frac{2f}{L^2}; \quad M \approx \frac{2f}{L^2} EI$$

e igualmente la energía de deformación:

$$U \approx \frac{1}{2} \int MC dx = \frac{1}{2} \frac{4f^2 EI}{L^3}$$



(Valores en función de δ)

Si el arco es de directriz sencilla, la integración es fácil. *

En caso contrario en la expresión (i) se resuelven las integrales numéricamente (se transforman en sumatorios por cualquiera de los métodos usuales: Simpson, Gauss, etc.)

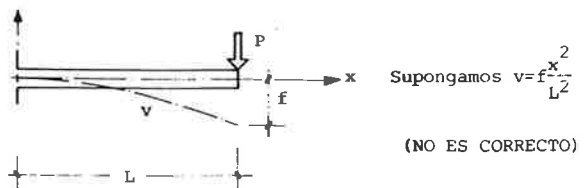
12.2 EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES EN ANÁLISIS EN ROTURA.

Hemos visto que es equivalente formular el equilibrio o plantear que el trabajo virtual en un movimiento infinitesimal es nulo. En muchos casos (y en análisis en rotura es uno de los más claros) es más sencillo plantear esto último.

Imaginemos que analizamos una configuración de rotura supuesta para el arco de la figura. Si suponemos rotura por momento plástico igual en todas las rótulas basta formular una ecuación de trabajo nulo. **

2.3 OBTENCIÓN DE APROXIMACIONES.

A título únicamente descriptivo vamos a utilizar el método de Rayleigh-Ritz y el principio de los trabajos virtuales para aproximar la flecha de una ménsula partiendo de una expresión supuesta (e incorrecta) para la deformación.



$$\text{Supongamos } v = f \frac{x^2}{L^2}$$

(NO ES CORRECTO)

La energía potencial total es aproximadamente:

$$\pi \approx pf - U$$

minimizando respecto a f :

$$\frac{\partial \pi}{\partial f} = 0 \approx p - 4f \frac{EI}{L^3}, \text{ de donde}$$

$$f \approx \frac{pL^3}{4EI} \quad (\text{en realidad es } \frac{pL^3}{3EI})$$

PODEMOS RESOLVER LA MISMA APROXIMACION POR TRABAJOS VIRTUALES:

Suponemos la misma deformada, y por lo tanto la misma ley de aproximada de esfuerzos reales:

$$v \approx f \frac{x^2}{L^2}; \quad M \approx \frac{2f}{L^2} EI$$

Desplazamos infinitesimalmente la estructura añadiendo (arbitrariamente) una curvatura \bar{C} constante en todas las secciones.

El descenso bajo p en ese caso es:

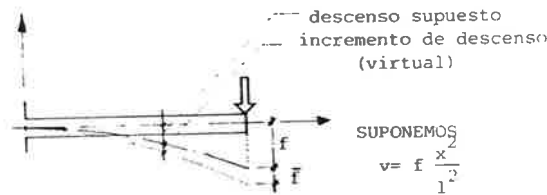
$$\bar{f} = \bar{C} \frac{L^2}{2}$$

Anulando el trabajo:

$$p\bar{f} - \int M \bar{C} dx \approx 0; \quad p\bar{C} \frac{L^2}{2} - \frac{2fEI}{L^2} \bar{C} L \approx 0$$

$$f \approx \frac{L^3 p}{4EI}$$

(Debe recordarse que el valor de f según la resistencia de materiales es $f = \frac{L^3 p}{3EI}$)



El método de los elementos finitos utiliza sistemáticamente el procedimiento descrito:

-Expresar los desplazamientos de todos los puntos en forma aproximada y en función de parámetros inicialmente desconocidos.

-Obtener las expresiones aproximadas de los esfuerzos a partir de los desplazamientos, y por tanto en función de dichos parámetros.

-Expresar la nulidad del trabajo virtual para cualquier deformación virtual arbitraria, y de ello, deducir el valor de los parámetros y los valores de toda la aproximación.

Supongamos que la puesta en carga se hace en dos pasos sucesivos:

Caso a) 1°) Carga P_1
 2°) Carga P_2
 El trabajo realizado es $\frac{1}{2} P_1 \delta_{11}$ 1°)

$$+ P_1 \delta_{21} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{22} \quad 2^\circ)$$

Caso b) 1°) Carga P_2
 2°) Carga P_1
 El trabajo realizado es $\frac{1}{2} P_2 \delta_{22}$ 1°)

$$+ P_2 \delta_{12} + \frac{1}{2} P_1 \delta_{11} \quad 2^\circ)$$

De donde se deduce $P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}$ (Maxwell), que puede generalizarse sin dificultad:

$$\sum P_1 \delta_{21} = \sum P_2 \delta_{12} \quad (\text{Betti}) \quad \{12.1\}$$

Para los estados de esfuerzo y deformación de la viga de la figura, por el teorema anterior resulta:

$$T_1 \delta = M_2 \theta \quad \text{y por tanto} \quad \frac{T_1}{\theta} = \frac{M_2}{\delta}$$

$$\text{Si dado el giro } \theta \text{ llamamos } \frac{M_1}{\theta} = K_{11} \text{ y } \frac{T_1}{\theta} = K_{21}$$

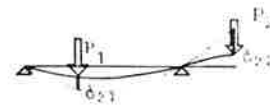
Si dado el desplazamiento δ llamamos

$$\frac{M_2}{\delta} = K_{12} \text{ y } \frac{T_2}{\delta} = K_{22}$$

cuando existan ambos movimientos será:

$$\begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \end{bmatrix}$$

siendo la matriz $\{K\}$ la matriz de rigidez simétrica.



OTROS TEOREMAS DEL TRABAJO.

12.4 TEOREMA DE RECIPROCIDAD, MAXWELL-BETTI.

Supongamos una estructura elástica sometida en tiempos distintos a dos sistemas de fuerzas P_1 y P_2 .

Sean δ_1 los desplazamientos que provoca el sistema 1 de cargas actuando sólo. De entre estos, los δ_{12} (léase δ uno en dos) son los situados bajo los puntos de aplicación de las cargas del sistema 2.

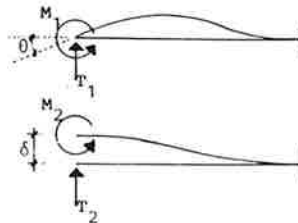
Sean δ_2 los desplazamientos provocados por el sistema 2 de cargas y de entre ellos, δ_{21} los situados bajo el punto de aplicación de las cargas 1.

Se demuestra que:

$$\sum P_1 \delta_{21} = \sum P_2 \delta_{12} \quad \{12.1\}$$

Si analizamos la relación entre esfuerzos y movimientos en el extremo de una viga empotrada en su otro extremo, y expresamos tales relaciones en forma matricial, por el teorema de reciprocidad la matriz es simétrica.

Las matrices de rigidez son simétricas.



* Sea un cuerpo elástico sometido a cargas que actúan simultáneamente y progresivamente desde cero a sus valores finales.

El trabajo realizado en el proceso de carga vale:

$$U = \frac{1}{2} P \Delta$$

si diferenciamos:

$$dU = \frac{1}{2} P d\Delta + \frac{1}{2} \Delta dP$$

imaginando P, Δ como un sistema de cargas y sus flechas y $dP, d\Delta$ como otro sistema de cargas y sus flechas (que hacen pasar el estado U al estado $U + dU$).

Por Betti $\sum P d\Delta = \sum \Delta dP$, luego

$$dU = \sum P d\Delta, \text{ y también}$$

$$dU = \sum \Delta dP$$

Suponiendo en la primera (segunda) expresión que el sistema $dP, d\Delta$ es tal que permite alterar todas las $P_i(\Delta_i)$ pero sólo una $\Delta_i(P_i)$, resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i \quad \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i \right) \quad \{12.2\}$$

** Mediante el teorema de Menabrea pueden obtenerse fácilmente reacciones hiperestáticas:

Veamos como ejemplo el momento de EMPOTRAMIENTO DE UNA VIGA.

La energía de deformación vale:

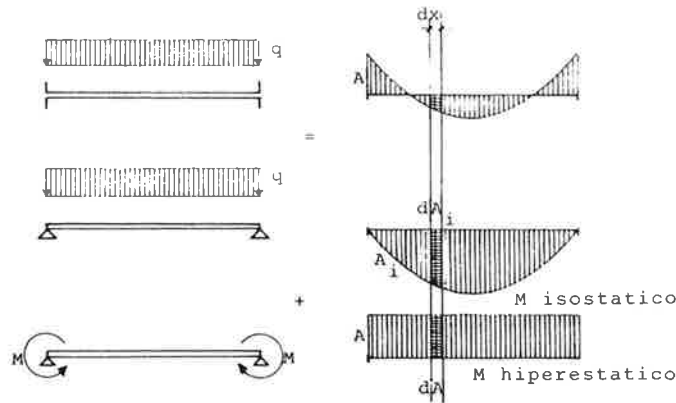
$$U = \int \frac{(M_{is} + M)^2}{EI} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \int dx \frac{2(M_{is} + M)}{EI} = 0 \quad (\text{por Menabrea})$$

$$M_i dx = dA_i, \quad M dx = dA, \text{ y por tanto}$$

$$A_i + A = 0$$

$$\frac{2}{3} q \frac{L^2}{8} L = -ML, \quad M = -\frac{qL^2}{12}$$



12.5 TEOREMAS DE CASTIGLIANO-ENGESSER.

Si expresamos la energía de deformación de un cuerpo cargado por cargas aisladas, en función de éstas, la derivada de la energía respecto de una de dichas cargas es la flecha bajo la misma. *

Análogamente si expresamos la energía de deformación en función de las flechas que existen bajo las cargas, la derivada de la energía respecto de la flecha de uno de los puntos es la carga situada sobre el mismo.

$$\frac{\delta U(P)}{\delta P_i} = \Delta_i; \quad \frac{\delta U(\Delta)}{\delta \Delta_i} = P_i \quad \{12.2\}$$

12.6 TEOREMA DE MENABREA.

El teorema dice que:

La derivada de la energía de deformación respecto de las incógnitas hiperestáticas es nula, y podría considerarse como un corolario del anterior para el caso en que trabajemos con las reacciones hiperestáticas como incógnitas.

Puede, sin embargo extenderse a otros casos (como el de barras superabundantes en cerchas, etc.)

Es un teorema de gran utilidad. **

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN

INTRODUCCION.

El objetivo del análisis es obtener las funciones que expresan las tensiones y las deformaciones en todo punto del cuerpo que forma la estructura.

Para ello se dispone de ecuaciones en derivadas parciales suficientes ({1.1}, {3.2}, {3.3}, o {9.1}, {9.2} y {6.2}, {6.4}), y pueden establecerse suficientes condiciones en el contorno del cuerpo, {2.1},...

Sin embargo la complejidad de éstas impide, en general, su integración, por lo que es necesario obtener soluciones aproximadas a dichos sistemas de ecuaciones.

Hay dos grandes métodos para obtener dichas aproximaciones:

a) En vez de intentar resolver las funciones, que describen los valores de $\{\tau\}$, $\{e\}$ en los infinitos puntos del cuerpo, se establece un conjunto finito de puntos (una malla) y se buscan los valores de la función sólo en estos puntos, interpolando posteriormente para los demás.

De este modo se sustituye la búsqueda de funciones por la búsqueda de valores de éstas en puntos dados, para lo que las ecuaciones en derivadas parciales se sustituyen por ecuaciones en diferencias finitas en todos y cada uno de los puntos de la malla.

Se trata del MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.

Equilibrio $\{V\}\{\tau\} + \{p\} = \{\sigma\}$ {1.1}

Compatibilidad {3.2} y {3.3}

o también

Equilibrio $(G+\lambda)\{V\}\theta + G\Delta\{u\} + \{p\} = \{0\}$ {9.1}

Compatibilidad $\Delta S = 0$ (estado plano) {9.2}

Relaciones tensión-deformación

$\{e\} = \frac{1+\nu}{E} \{\tau\} - \frac{\nu}{E} S\{I\}; S = \{\bar{\tau}\}$ {6.2}

$\{\tau\} = \frac{E}{1+\nu} \{e\} + \lambda\theta\{I\}; \theta = \{\bar{e}\}$ {6.4}

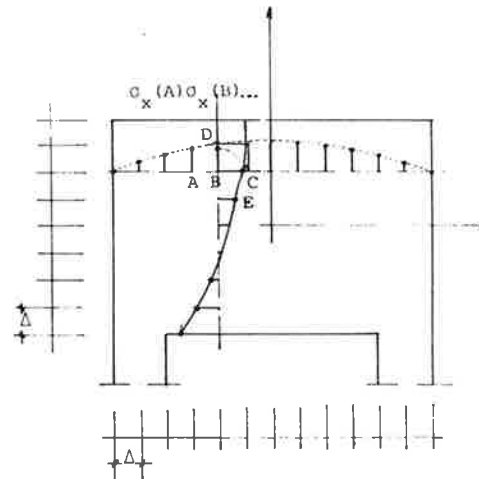
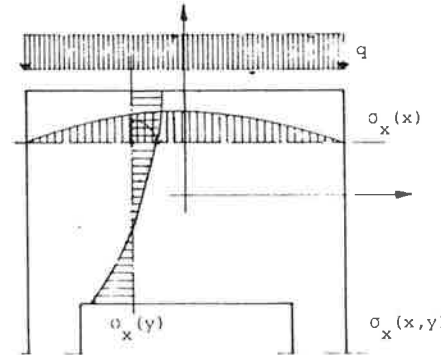
Contorno $\{\tau_{\xi}\} = \{v_{\xi}\}\{\tau\}; (\{\tau_{\xi}\} = \text{cargas conocidas})$ {2.1}

$\{u\}$ conocido en apoyos

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_x(C) - \sigma_x(A)}{2\Delta} + \frac{\tau_{xy}(D) - \tau_{xy}(E)}{2\Delta} = 0$$

Ecuación en derivadas parciales

Ecuación en diferencias finitas

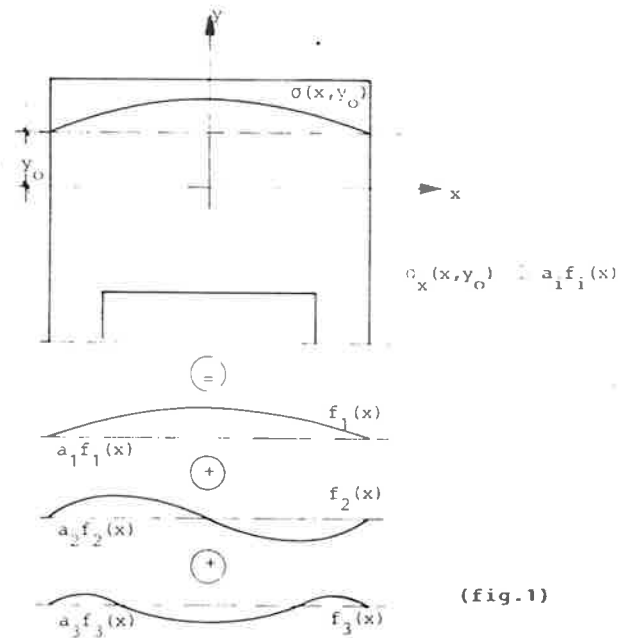


En todas las ecuaciones se expresan las funciones buscadas por sus aproximaciones, lo que permite deducir los coeficientes, por ejemplo;

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

se expresa en la forma

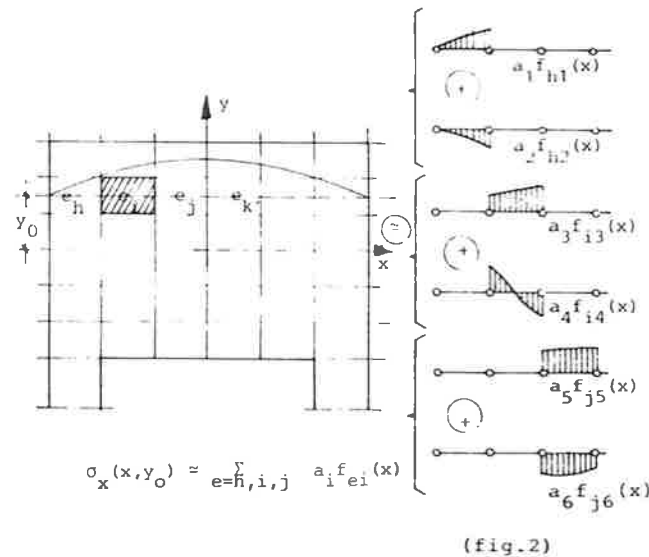
$$\frac{\partial \sigma_x(a_1 \dots a_i \dots)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(a_1 \dots a_i \dots)}{\partial y} = 0$$



b) En vez de resolver las funciones, se trata de aproximarlas suponiéndolas combinación (lineal normalmente) de funciones preestablecidas con coeficientes (parámetros) desconocidos, cuya obtención permite aproximar la solución mediante la combinación supuesta. (fig. 1)

Como ya se ha visto esta es la base del método de Rayleigh-Ritz y, (entre otros), del METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

En este último las funciones se definen separadamente en el interior de trozos de dimensiones finitas (elementos finitos), a las que se impone (en general) su continuidad a través del contorno de separación entre elementos. Los parámetros suelen ser movimientos de puntos individuales de cada elemento, puntos situados en su contorno y en su interior. (fig. 2)



$$\Delta\psi = -2 \quad \{10.5\}$$

$$\psi_s = 0 \text{ (nula en el contorno)} \quad \{10.6\}$$

$$M = 2G\theta \int \psi^2 dx dy \quad \{10.7\}$$

$$\{\tau\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \tau_{xz} = G\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \{10.4\}$$

Aproximación de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}_{0,0} \approx \frac{\psi_{1,0} - \psi_{-1,0}}{2h_x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}_{0,0} \approx \frac{\psi_{0,1} - \psi_{0,-1}}{2h_y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}_{0,0} \approx \frac{1}{h_x^2} (\psi_{1,0} - \psi_{0,0} - \psi_{0,0} + \psi_{-1,0}) = \frac{\psi_{1,0} + \psi_{-1,0} - 2\psi_{0,0}}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}_{0,0} \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}_{0,0} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{0,1} - \psi_{0,-1}}{2h_y} \right) = \frac{\psi_{1,1} - \psi_{-1,1} - \psi_{1,-1} + \psi_{-1,-1}}{4h_x h_y} \quad \{13.1\}$$

Sea una sección cuadrada y una malla de puntos.

Por simetrías solo existen distintos los puntos del contorno (donde ψ es nulo) y tres puntos más.

Planteando $\Delta\psi = -2$ en dichos puntos, en cada uno

de ellos:
$$\Delta\psi = \frac{\sum_{e=1}^4 \psi_e - 4\psi_p}{h^2} \quad (e = \text{los 4 puntos del entorno considerado})$$

$$p = \text{punto considerado}$$

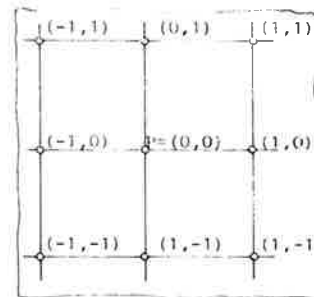
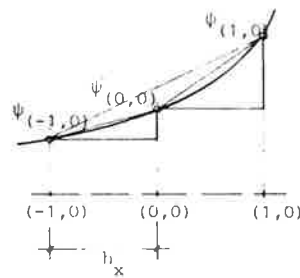
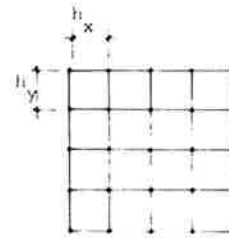
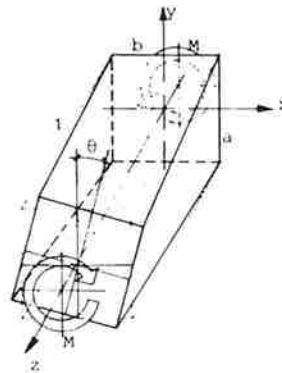
por lo que $\Delta\psi_1 = -2 \rightarrow$

$$\begin{aligned} -4\psi_1 + 2\psi_2 &= -2h^2 \\ 2\psi_1 - 4\psi_2 + \psi_3 &= -2h^2 \\ 4\psi_2 - 4\psi_3 &= -2h^2 \end{aligned}$$

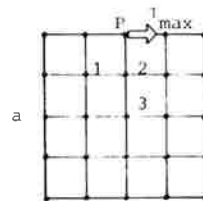
de donde $\psi_1 = \frac{5.5}{4} h^2$; $\psi_2 = \frac{7}{4} h^2$; $\psi_3 = \frac{9}{4} h^2$

$$\iint \psi^2 dx dy \approx (4\psi_1 + 4\psi_2 + \psi_3) h^2 = 14.75 h^4$$

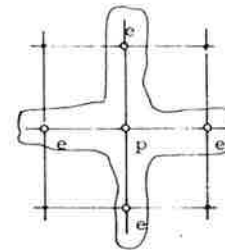
$$\tau_{\max} = \frac{M}{2 \iint \psi^2 dx dy} \frac{\partial \psi}{\partial y}_P = \frac{M}{2 \cdot 14.75 h^4} \cdot \frac{7}{4} \frac{h^2}{h} \approx \frac{4M}{3a^3}$$



Pueden referenciarse los puntos a partir de cualquiera de ellos.



$$h_x = h_y = \frac{a}{4} = h$$



(Representación gráfica del operador Δ)

13.1 EL METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

En este método se trata de aproximar las funciones buscadas obteniendo sus valores aproximados en puntos discretos del cuerpo, e interpolando para el resto. Veamos un ejemplo concreto.

TORSION DE SECCION RECTANGULAR SIN COACCION AL ALABEO.

Vimos en 10.2.4 que el problema se reducía a obtener una función ψ que cumpla {10.5}, {10.6} y {10.7}, y una vez hallada, las tensiones se obtienen sin dificultad ({10.4}).

Sustituimos la búsqueda de $\psi(x,y)$ por la búsqueda de ψ en un conjunto finito de puntos situados en una malla a distancias h_x, h_y .

Puesto que las ecuaciones disponibles de ψ son en derivadas parciales, obtenemos la aproximación de éstas mediante diferencias {13.1}, pudiendo plantearse las ecuaciones que representan el problema en todos los puntos de la malla, y que solo dependen de los valores buscados. Estos pueden obtenerse resolviendo el sistema (lineal) de ecuaciones que resulta, como en el ejemplo, en el que el valor aproximado obtenido representa, con un error del 5% el valor real de la tensión máxima.

* a) Hallar $\{\tau\}$

$$\text{Las ecuaciones son } \{V\}\{\tau\} = \{0\} \quad \{1.1\}$$

$$\Delta S = 0 \quad \{9.2\}$$

en el entorno se conocen dos componentes de la tensión.

b) Hallar $\{u\}$

Las ecuaciones son

$$(\lambda + G)\{V\}\theta + G\Delta\{u\} = \{0\} \quad \{9.1\}$$

en el entorno se conocen dos componentes de la tensión, que permiten plantear dos ecuaciones adicionales obtenidas de:

$$\frac{1}{2} \{V\}^T \{u\} + \frac{1}{2} \{u\}^T \{V\} = \frac{1+\nu}{E} \{\tau\} - \frac{\nu}{E} S\{I\} \quad \{3.1\}$$

$$\{6.2\}$$

c) Hallar A (función de Airy)

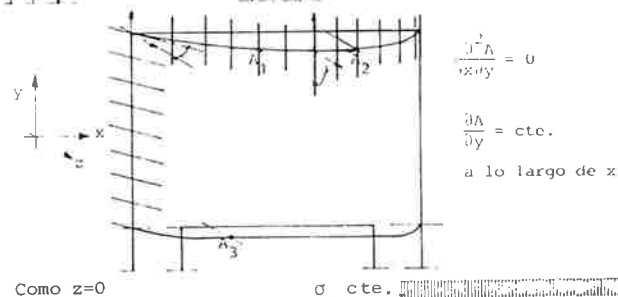
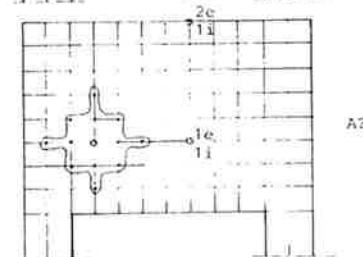
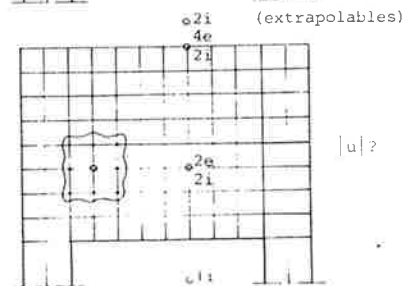
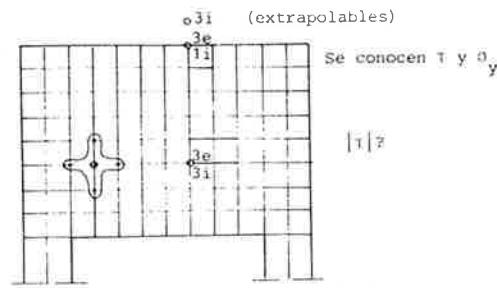
La ecuación en todo punto del interior es:

$$\Delta \Delta A = 0 \quad \{9.4\}$$

en el contorno pueden plantearse dos ecuaciones obtenidas de:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \quad \{9.3\}$$

en particular como solo se utilizan las derivadas segundas y cuartas de A, podemos fijar arbitrariamente A en tres puntos no alineados. Si la anulamos en tres vértices, el valor de A en los bordes es el de la ley de momentos de las cargas sobre una viga ficticia apoyada en los vértices ($\partial^2 A / \partial x^2 = \sigma_y$ p. ej.) y sus pendientes pueden fácilmente extenderse a todo el contorno ($\tau = -\partial^2 A / \partial x \partial y$) de modo que pueden hallarse los valores de A en el contorno independientemente de su valor en el interior, y puede establecerse la forma de extrapolar el valor de A al exterior.



Como $z=0$

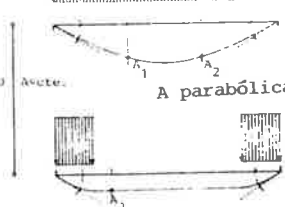
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} \text{ es constante a lo largo del borde vertical}$$

σ_y cte.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \text{cte.}$$

a lo largo de x



Para aproximar la solución al problema elástico en una estructura, bastará elegir una forma de representar el problema (ecuaciones e incógnitas) y plantear las ecuaciones en diferencias.

La elección de la representación tiene, sin embargo una importancia crucial; en la figura se representa el caso de una viga pared, indicándose tres formas de abordar la solución: *

- Mediante las ecuaciones en tensiones.
- Mediante las ecuaciones en movimientos.
- Mediante la función de Airy.

En las figuras se indican:

-La forma de las ecuaciones (puntos a los que afecta el planteamiento de las ecuaciones en un punto cualquiera),

-El número de ecuaciones e incógnitas por punto, interior al contorno o perteneciente a él.

-El número de "incógnitas" en puntos exteriores al contorno: Estas deben ser extrapoladas a partir de los valores en la estructura real, y son necesarias por la forma de las ecuaciones.

Comparando los tres planteamientos se observa la gran ventaja de trabajar con una forma de representación (la función de Airy) frente a las otras: es menor el número de incógnitas, y aun cuando plantear las condiciones de contorno es más complejo que en el caso a), no entraña una dificultad especial.

* No considerando (temporalmente) las fuerzas de masa (que pueden considerarse aplicadas en la superficie):

$$\int_S \{\bar{u}_S\} \{\tau_S\}^T ds = \int_V \{\bar{e}\} \{\tau\}^T dv \quad \{11.3\}$$

Por sencillez en el futuro desarrollo vamos a expresar en lo sucesivo tensiones y deformaciones en forma de vector columna: $\{\epsilon\}$ $\{\sigma\}$ (y los $\{u\}$ como vector columna).

Estas son las dos formas de representación para el caso de estados planos.

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{bmatrix}; \{\epsilon\} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix}; \{\tau\} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix}; \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

La ecuación {11.3} queda en la forma:

$$** \int_S \{\bar{u}_S\}^T \{\tau_S\} ds = \int_V \{\bar{e}\}^T \{\sigma\} dv$$

$\{u\}$, $\{\epsilon\}$ y $\{\sigma\}$ se hallan ligados

$\{\epsilon\} = \{\partial\}\{u\}$ ($\{\partial\}$ es un operador diferencial)

$\{\sigma\} = \{D\}\{\epsilon\}$ ($\{D\}$ parámetros de rigidez del material)

$$\{13.2\}$$

Por ejemplo, en estado plano de tensión:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \frac{E}{1+\nu} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Si establecemos una aproximación a los movimientos podemos obtener deformaciones y tensiones a partir de éstos. ⁽¹⁾

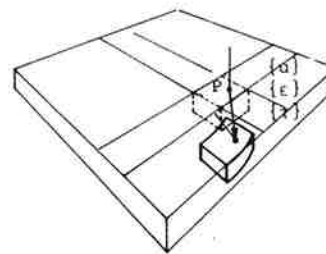
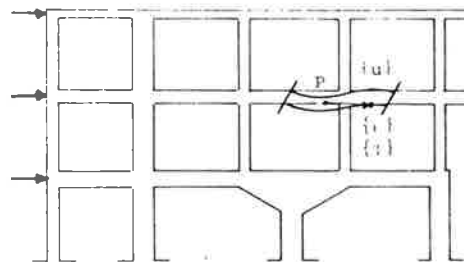
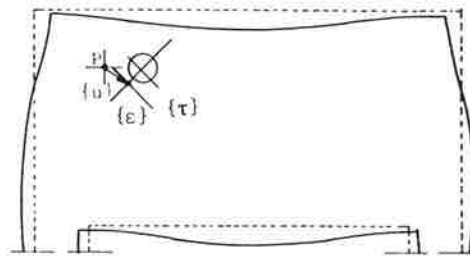
$\{u\} \approx \{N\}\{a\}$

$\{\epsilon\} = \{\partial\}\{u\} \approx \{\partial\}\{N\}\{a\} = \{B\}\{a\}$

$\{\sigma\} = \{D\}\{\epsilon\} \approx \{D\}\{B\}\{a\}$ {13.3}

(1) Por ejemplo, en un estado plano podíamos probar :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y & 0 & y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$



13.2 EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Vamos a realizar una descripción general del método, y analizaremos posteriormente los detalles del mismo.

Dada una estructura cargada, el objetivo es obtener un estado en todos sus puntos ($\{u\}$, $\{\epsilon\}$, $\{\sigma\}$) en equilibrio y manteniendo la compatibilidad de deformaciones (continuidad en las $\{u\}$).

Para ello se formula la condición de equilibrio en su forma débil (trabajo virtual nulo). *

$$\int_S \{\bar{u}_S\} \{\tau_S\}^T ds = \int_V \{\bar{e}\} \{\tau\}^T dv \quad \{11.3\}$$

Trataremos de obtener un estado aproximado que cumpla dicha condición.

Para ello establecemos una aproximación a los movimientos $\{u\}$ a través de funciones pre-fijadas $\{N\}$ que satisfagan el estado en el contorno de la estructura, y de parámetros no conocidos $\{a\}$ que intentaremos obtener mediante la condición {11.3}.

Sabemos que las deformaciones $\{\epsilon\}$ derivan de los movimientos $\{u\}$, y a su vez las tensiones $\{\sigma\}$ pueden obtenerse como expresión de las deformaciones. **

$\{\epsilon\} = \{\partial\}\{u\}$

$\{\sigma\} = \{D\}\{\epsilon\}$ {13.2}

De este modo, si aproximamos los movimientos, podemos obtener aproximaciones para deformaciones y tensiones.

$\{u\} \approx \{N\}\{a\}$

$\{\epsilon\} \approx \{B\}\{a\}$ siendo $\{B\} = \{\partial\}\{N\}$

$\{\sigma\} \approx \{D\}\{B\}\{a\}$

{13.3}

$$* \int_S \{\bar{u}_S\}^T \{\tau_S\} ds = \int_V \{\bar{\epsilon}\}^T \{\sigma\} dv \text{ puede transformarse}$$

considerando {13.3}:

Si $\{u\} = \{N\} \{a\}$ es la aproximación del estado

real de la estructura

$\{\bar{u}\} = \{N\} \{\bar{a}\}$ es la aproximación de un estado

arbitrario (virtual)

podemos escribir:

$$\int_S \{\bar{a}\}^T \{N\}^T \{\tau_S\} ds = \int_V \{\bar{a}\}^T \{B\}^T \{D\} \{B\} \{a\} dv$$

y puesto que los valores de los parámetros son constantes para un problema dado

$$\{\bar{a}\}^T \int_S \{N\}^T \{\tau_S\} ds = \{\bar{a}\}^T \left(\int_V \{B\}^T \{D\} \{B\} dv \right) \{a\}$$

Siendo $\{N\}$, $\{B\}$, y $\{D\}$ expresiones conocidas y siendo conocidas las fuerzas en la superficie de la estructura $\{\tau_S\}$ pueden efectuarse las integrales definidas de la expresión anterior, de modo que quedará:

$$\{\bar{a}\}^T \{r\} = \{\bar{a}\}^T \{K\} \{a\} \quad \{13.4\}$$

y al tener que cumplirse para todo $\{\bar{a}\}$ arbitrario

$$\{r\} = \{K\} \{a\} \quad \{13.5\}$$

** Si estando la estructura dividida en elementos realizamos las integrales en el ámbito de cada elemento y los sumamos, puede escribirse

$$\{r\} = \{K\} \{a\} \quad \{13.5\}$$

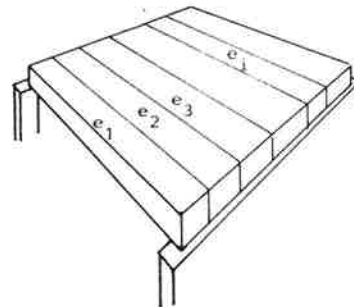
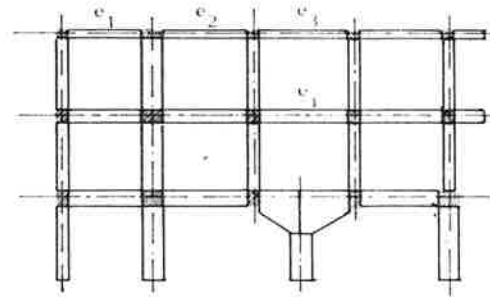
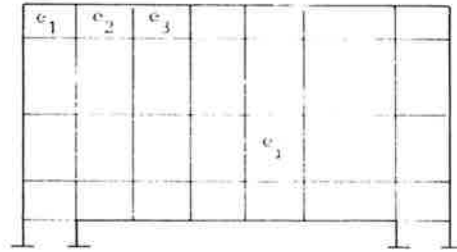
en la forma

$$\sum_e \{F\} = \left(\sum_e \{J\} \right) \{a\}$$

y obtenerse el sistema {13.5} correspondiente al estado (aproximado) de la estructura como "ensamblaje" (suma \sum_e) de los correspondientes a los elementos en que se ha discretizado la estructura.

$\{F\} = \{J\} \{U\}$ es la misma expresión

$\{r\} = \{K\} \{a\}$ pero referida a un solo elemento en vez de a toda la estructura.)



Dicha descripción aproximada deberá cumplir la condición de equilibrio y compatibilidad en su forma débil {11.3}, de modo que expresando esta condición podemos establecer una ecuación (escalar) *

$$\{\bar{a}\}^T \{r\} = \{\bar{a}\}^T \{K\} \{a\} \quad \{13.4\}$$

que expresa que el trabajo realizado es nulo para todo campo arbitrario de movimientos (definido por $\{\bar{a}\}$).

Hay que hacer notar que $\{K\}$ es una matriz simétrica, como ya veremos, y que si {13.4} ha de cumplirse para todo $\{\bar{a}\}$ arbitrario debe ser

$$\{r\} = \{K\} \{a\} \quad \{13.5\}$$

Así, tenemos un sistema de ecuaciones lineales que permite determinar $\{a\}$, y por lo tanto resolver la aproximación buscada.

Al ser $\{K\}$ y $\{r\}$ integrales (sumas) es conveniente a menudo descomponer la estructura en partes (elementos) y obtener la integral extendida a toda la estructura como suma de las integrales extendidas a cada elemento, usualmente más sencillas. **

$$\{K\} = \sum_e \int_e \{B\}^T \{D\} \{B\} dv = \sum_e \{J\}_e \quad \{13.6\}$$

Si además de entre los parámetros $\{a\}$ considerados para la estructura sólo algunos tienen influencia en un elemento determinado, siendo nula la intervención de los demás, las correspondientes filas y columnas de las matrices $\{J\}$ son nulas, por lo que pueden no almacenarse (almacenando sólo n_e ne

$\{J\}$ para $n_e \leq n$ y usualmente $n_e \ll n$). Dichas filas (columnas) de ceros sólo serán necesarias en el momento de hacer la suma (que por ello se denomina ensamblaje: hay que sumar cada valor de n_e ne $\{J\}$ en el lugar correcto de $\{K\}$).

Es usual considerar como parámetros los movimientos de puntos privilegiados de la estructura (nodos).

* Fuerzas nodales: $\{r\}$ en las expresiones {13.4} y {13.5} tiene el sentido de "fuerza" asociada a cada "desplazamiento" $\{a\}$, en la medida en que su producto mide el trabajo (virtual) de las fuerzas exteriores.

$$1: \{r\} = \int_S \{N\}^T \{\tau_s\} ds \quad \{13.7\}$$

$$2: \{J\} = \int_e \{B\}^T \{D\} \{B\} dv \quad \{13.8\}$$

$$\{K\} = \sum_e \{J\} \quad \{13.6\}$$

$$\{r\} = \{K\} \{a\} \quad \{13.5\}$$

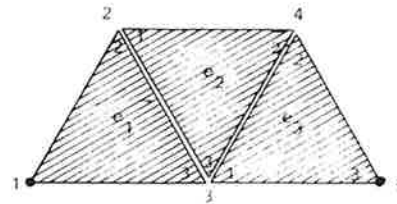
Como ejemplo de "ensamblaje" supongamos una estructura en estado plano discretizada en tres elementos e_1, e_2, e_3 , y con "nodos" asociados a los vértices numerados 1, 2, 3, desde el punto de vista de cada elemento y 1, 2, 3, 4, 5, desde el de la estructura.

Si para el elemento 2 su matriz propia expresa;

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{Elemento})$$

al sumar su efecto a la estructura, añadirá

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11} & J_{13} & J_{12} & 0 \\ 0 & J_{31} & J_{33} & J_{32} & 0 \\ 0 & J_{21} & J_{23} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (\text{Estructura})$$



Por lo tanto, resolver un problema estructural mediante el método de los elementos finitos requiere:

0: Establecer una partición de la estructura en elementos, y definir los parámetros en base a los que describir el comportamiento de dichos elementos (elementos, nodos y desplazamientos nodales).

1: Establecer las acciones sobre la estructura en forma de fuerzas nodales, mecánicamente equivalentes a las acciones reales. *

2: Construir la matriz $\{K\}$ (llamada matriz de rigidez pues usualmente relaciona desplazamientos con fuerzas) por ensamblaje (suma) de las matrices $\{J\}$ de rigidez de cada elemento.

3: Resolver el sistema de ecuaciones resultante obteniendo de este modo los "desplazamientos nodales" $\{a\}$ que permiten reconstruir el estado (aproximado) de toda la estructura. **

** En general para una estructura dada, en cada nodo es conocido, bien su componente r_ℓ (fuerza acción sobre el nodo libre), bien su desplazamiento a_δ (coacción al movimiento conocida en sustentaciones); es usual, por tanto, escribir el sistema $\{r\} = \{K\} \{a\}$ en la forma:

$$\begin{bmatrix} r_\ell \\ r_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\ell\ell} & K_{\ell\delta} \\ K_{\delta\ell} & K_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\ell \\ a_\delta \end{bmatrix}$$

en el que son conocidos $\{r_\ell\}$, $\{a_\delta\}$, y desconocidos $\{a_\ell\}$ (movimientos) y $\{r_\delta\}$ (reacciones).

De este modo, las ecuaciones se pueden escribir y resolver.

$$\begin{aligned} \{r_\ell\} - \{K_{\ell\delta}\} \{a_\delta\} &= \{K_{\ell\ell}\} \{a_\ell\} \quad (\text{obtención de desplazamientos libres}) \\ \{r_\delta\} &= \{K_{\delta\ell}\} \{a_\ell\} + \{K_{\delta\delta}\} \{a_\delta\} \quad (\text{obtención de reacciones}) \end{aligned}$$

Es usual construir sólo $\{K_{\ell\ell}\}$

ANALISIS MATRICIAL

M.E.F.: Análisis matricial.

* 1.- Elección de la aproximación.

Elementos: las barras.

Nodos: los nudos de unión entre barras, y cualquier punto singular que convenga (por cambios de sección, de geometría,...), de modo a simplificar las barras al máximo.

Parámetros nodales: movimientos de los nodos: desplazamientos (estructuras de nudos articulados o rígidos) y también giros (estructuras de nudos rígidos).

Interpolación de movimientos en interior de barras: mediante las ecuaciones ya conocidas derivadas de la hipótesis de Navier.

** 2.- Fuerzas nodales.

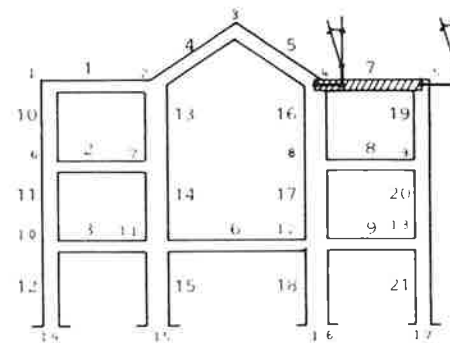
Las correspondientes a los movimientos nodales elegidos: componentes H y V de las acciones sobre nudos (más momento sobre nudo en nudos rígidos).

Se pueden obtener mediante {13.7}, aunque es más sencillo y más adecuado en este caso considerarlas como resultado de descomponer las acciones actuantes (y los esfuerzos resultantes de las mismas) en dos sistemas:

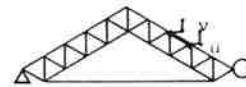
- El primero, sin movimientos nodales (ii"empotramiento perfecto"ii), y por tanto con las reacciones sobre los nodos precisas para eliminar tales movimientos.
- El segundo, con movimientos nodales y con acciones sobre nodos (iguales y contrarias a las reacciones "de empotramiento" del sistema anterior). Es este segundo sistema el que se analiza matricialmente, superponiéndose finalmente los esfuerzos de las dos partes de la descomposición.

3.- Matriz de rigidez: Matrices de barras y ensamblaje, Lo vemos a continuación.

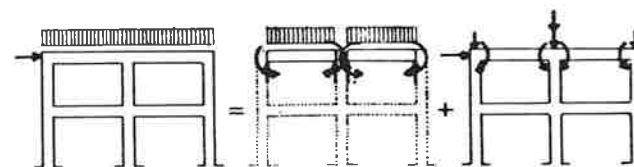
4.- Resolución del sistema de ecuaciones y derivación de toda la aproximación.



21 Barras
13 Nudos libres
4 Nudos de sustentación
51 Valores desconocidos
39 Movimientos incógnita
12 Reacciones



18 Barras
13 Nudos libres
4 Nudos de sustentación
51 Valores desconocidos
39 Movimientos incógnita
12 Reacciones



Modelo de estructura

= local
(Resistencia de materiales)

+ Global
(Matricial)

14.0 EL ANALISIS MATRICIAL COMO ESPECIALIZACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Aun cuando el "cálculo" matricial de estructuras de barras es históricamente anterior al Método de los Elementos Finitos, puede ser considerado como una especialización del mismo a este tipo de estructuras.

En efecto, se trata de obtener los esfuerzos de una estructura discretizada en barras con acciones sobre los nudos de unión entre éstas, y planteando el problema de forma que las incógnitas sean los movimientos de esos mismos nudos. *

Las fuerzas actuantes sobre la estructura se descomponen para su análisis. **
(1º: acciones "locales" distribuidas y reacciones sobre extremos de barras: no hay movimientos nodales; 2º: acciones "globales" sobre nudos, incluso fuerzas que contrarresten las "reacciones" añadidas en el primer sistema; es este último sistema el que se analiza matricialmente).

La matriz de rigidez {K}, que relaciona acciones sobre nudos {r} con movimientos de éstos {a} ({r} = {K}{a}), se obtiene, como ya sabemos, por ensamblaje de las matrices de rigidez de las barras ({J}) expresadas todas ellas en los ejes generales elegidos para la estructura, y obtenidas, bien por inspección (si se conocen todos los términos), bien mediante la integración usual.

$$\{J\} = \int_e \{B\}^T \{D\} \{B\} dv$$

Antes de continuar, veamos un ejemplo para fijar ideas.

$$\{u\} \dots \dots \dots = u \quad \{14.1\}$$

$$\{\epsilon\} = \{\partial\}\{u\} \dots \dots \dots = C = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad \{14.2\}$$

por lo que conocemos $\{\partial\}$. El operador es:

$$\{\partial\} \dots \dots \dots = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\{\sigma\} = \{D\}\{\epsilon\} \dots \dots \dots = M = EI C \quad \{14.3\}$$

y por lo tanto es conocida $\{D\}$

$$\{D\} \dots \dots \dots = EI$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{para toda la estructura})$$

Si no hay cargas distribuidas en la viga, como es el caso tras la descomposición, en cada barra puede escribirse:

$$\{u\} = \{N\}_b \{a\}_b = \left[x - \frac{2}{1} x^2 + \frac{x^3}{1^2} \right] \left[-(1-x) + 2 \frac{(1-x)^2}{1} - \frac{(1-x)^3}{1^2} \right] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_d \end{Bmatrix} \quad \{14.4\}$$

(ver figura)

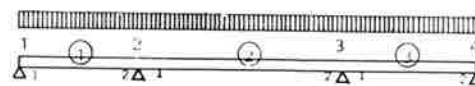
de modo que en cada barra $\{B\} = \{\partial\}\{N\}$

$$\{B\} = \left[-\frac{4}{1} + \frac{6x}{1^2} \right] \left[\frac{4}{1} - 6 \frac{(1-x)}{1^2} \right] \quad \text{y la matriz de rigidez de cada una de ellas es } \{J\}. \quad \{14.5\}$$

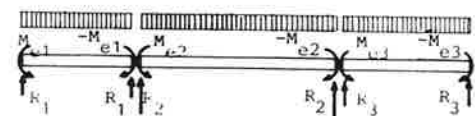
$$\{J\} = \int_V \{B\}^T \{D\} \{B\} dv$$

$$\{J\} = \int_1 \begin{Bmatrix} -\frac{4}{1} + \frac{6x}{1^2} \\ \frac{4}{1} - 6 \frac{(1-x)}{1^2} \end{Bmatrix} |EI| \begin{Bmatrix} -\frac{4}{1} + \frac{6x}{1^2} & \frac{4}{1} - 6 \frac{(1-x)}{1^2} \end{Bmatrix} dx$$

$$\{J\} = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{1} & 2 \frac{EI}{1} \\ 2 \frac{EI}{1} & 4 \frac{EI}{1} \end{bmatrix}$$



=

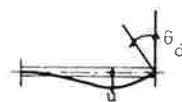


+



$$u = \left(x - \frac{2}{1} x^2 + \frac{x^3}{1^2} \right) \theta_1$$

(Puede obtenerse facilmente mediante la ley de Mohr, y análogamente).



$$u = \left(-(1-x) + 2 \frac{(1-x)^2}{1} - \frac{(1-x)^3}{1^3} \right) \theta_d$$

14.1 ANALISIS MATRICIAL (MEF) DE UNA VIGA CONTINUA

Sea la viga continua de la figura, con tres barras y cuatro apoyos, y de ejes cartesianos coincidentes para todas las barras.

La situación de equilibrio de la viga queda totalmente descrita por su deformada, por lo que los movimientos que, en todo punto, bastan para tal descripción son los descensos de la elástica de la viga ($\{u\} = u$) $\{14.1\}$

Las deformaciones pertinentes en el análisis de la viga son las curvaturas en cada sección, que pueden obtenerse de la elástica,

$$\{\epsilon\} = c = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \{14.2\}$$

Los esfuerzos correspondientes a tales deformaciones son los momentos flectores de cada sección

$$\{\sigma\} = M = EI c \quad \{14.3\}$$

Vemos que para resolver la viga basta obtener su elástica (u), lo que puede hacerse conocidos los giros sobre los apoyos, que son, pues, nuestros parámetros nodales.

La aproximación se describe pues:

*Nodos: 4, uno sobre cada apoyo.

*Elementos: 3, tres barras.

Parámetros nodales: giros en cada apoyo. Fuerzas nodales: momentos ejercidos sobre la viga en cada apoyo (ver figura). Matriz de rigidez: es elemental la obtención de la matriz de cada barra $\{J\}$, procediéndose inmediatamente al ensamblaje.

Para una barra aislada:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

(correspondiendo la numeración a extremos(nodos)de barra)

Para la viga completa:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \{K\} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \quad (\text{correspondiendo la numeración a nodos de estructura})$$

Puesto que $\{K\} = \sum_e \{J\}$

$$\{K\} = \begin{bmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{11}^2 & J_{12}^2 & 0 \\ 0 & J_{21}^2 & J_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^3 & J_{12}^3 \\ 0 & 0 & J_{21}^3 & J_{22}^3 \end{bmatrix}$$

1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4

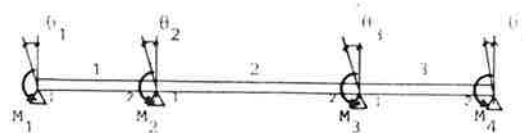
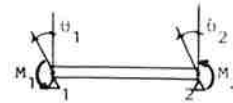
Puesto que los ejes son comunes, basta sumar cada componente de rigidez de cada barra en la posición que corresponde a los nudos de la estructura en que se inserta.

La solución al problema planteado se obtiene resolviendo:

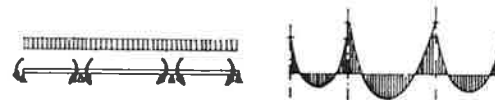
$$\begin{bmatrix} -M_{e1} \\ M_{e1} - M_{e2} \\ M_{e2} - M_{e3} \\ M_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^1 & J_{12}^1 & 0 & 0 \\ J_{21}^1 & J_{22}^1 + J_{11}^2 & J_{12}^2 & 0 \\ 0 & J_{21}^2 & J_{22}^2 + J_{11}^3 & J_{12}^3 \\ 0 & 0 & J_{21}^3 & J_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

acciones matriz obtenida giros
conocidas desconocidos

Obtenidos los giros, $\{\theta_4\}$ permite obtener la elástica, $\{14.2\}$ y $\{14.5\}$ las curvaturas, y $\{14.3\}$ los momentos en las secciones para la parte de la descomposición analizada, que superpuestos a los de "empotramiento perfecto", resuelven el problema.



Tras el ensamblaje y la resolución del sistema de ecuaciones resultantes, la solución completa del problema es elemental.



(Empotramiento perfecto)

+



(Matrixial)

=



(TOTAL)

Es conocido (ver figuras).

$$(14.6) \begin{Bmatrix} N_i \\ N_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & -EA \\ -EA & EA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_d \end{Bmatrix}$$

$$(14.7) \begin{Bmatrix} T_{zi} \\ T_{yi} \\ T_{zd} \\ T_{yd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ v_i \\ \theta_{zd} \\ v_d \end{Bmatrix}$$

$$(14.8) \begin{Bmatrix} M_{yi} \\ T_{zi} \\ N_{yd} \\ T_{zd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{yd} \\ w_d \end{Bmatrix}$$

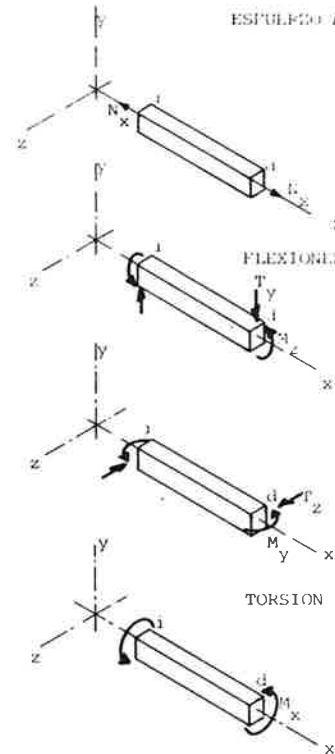
$$(14.9) \begin{Bmatrix} N_{xi} \\ N_{xd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GI_T}{l} & -\frac{GI_T}{l} \\ -\frac{GI_T}{l} & \frac{GI_T}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xd} \end{Bmatrix}$$

De donde puede escribirse:

$$(14.10) \begin{Bmatrix} N_i \\ T_{yi} \\ T_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ N_{zi} \\ N_d \\ T_{yd} \\ T_{zd} \\ M_{xd} \\ M_{yd} \\ N_{xd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_T}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_T}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_T}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_d \\ v_d \\ w_d \\ \theta_{xd} \\ \theta_{yd} \\ \theta_{zd} \end{Bmatrix}$$

$$(14.10) \{F\} = [J]\{u\}$$

ESFUERZO AXIAL



14.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DE BARRA

Aunque puede obtenerse como se ha expuesto para el caso general y para el ejemplo anterior, los términos de la matriz de rigidez de una barra son deducibles inmediatamente de la teoría de barras.

Sabemos que podemos considerar en el plano los esfuerzos siguientes:

(y las correspondientes deformaciones)

- N esfuerzo axial (alargamiento)
- M, T flexión (curvaturas)

y en el espacio:

- N_x esfuerzo axial (alargamiento)
- $M_z T_y$ flexión (plano OYX) (curvaturas)
- $M_y T_z$ flexión (plano OZX) (curvaturas)
- M_x momentos torsores (giros de torsión)

El análisis de dichos grupos de esfuerzos puede realizarse en cada barra independientemente, si nos hallamos en régimen lineal (elástico)

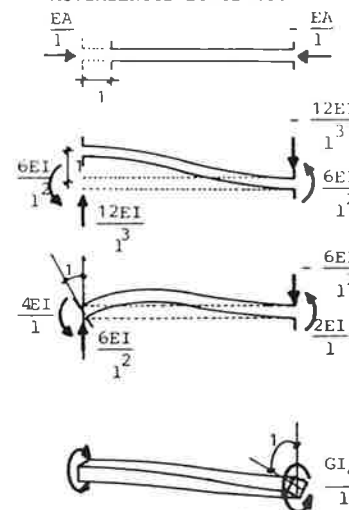
Puesto que un término de rigidez no es más que el esfuerzo preciso en un punto para mantener un movimiento unidad en otro, dichos términos se deducen de inmediato de las figuras.

De este modo, es fácilmente deducible la matriz de rigidez de barra en sus propios ejes para todos los movimientos posibles de sus extremos (3 desplazamientos y 3 giros en cada extremo suponen una matriz de 12×12)

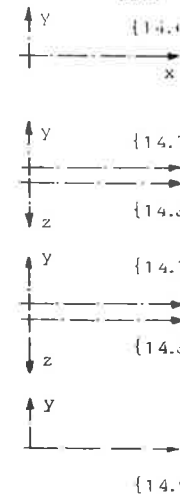
$$\{F\} = [J]\{u\} \quad (14.10)$$

De dicha matriz pueden extractarse las partes precisas para cada problema sin más que eliminar las filas y columnas correspondientes a los movimientos no significativos.

MOVIMIENTOS-ESFUERZOS



EJES



* Según la lección 2, sabemos proyectar vectores de unos ejes a otros. Suponiendo por ejemplo los movimientos del extremo izquierdo;

$$\{u_i\}_B = \{v\}\{u_i\}_e$$

análogamente, $\{F_i\}_B = \{v\}\{F_i\}_e$

o más en detalle (en casos planos):

$$\begin{vmatrix} u_i \\ v_i \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \end{vmatrix}_e = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \end{vmatrix}_e$$

(y análogamente podemos hacerlo en tres dimensiones, y lo mismo independientemente para los componentes de giro)

Puesto que para el extremo derecho es lo mismo, y puesto que los movimientos de ambos extremos son independientes

$$\begin{vmatrix} \{u_i\} \\ \{u_d\} \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} \{v\} & \{0\} \\ \{0\} & \{v\} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \{u_i\} \\ \{u_d\} \end{vmatrix}_e, \text{ es decir:}$$

$$\begin{aligned} \{U\}_B &= \{T\}\{U\}_e \\ \{F\}_B &= \{T\}\{F\}_e \end{aligned} \quad \{14.11\}$$

ecuaciones en las que podemos haber eliminado los movimientos no significativos, por ejemplo, los movimientos transversales en barras articuladas:

$$\begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ u_d \\ v_d \end{vmatrix}_B = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ u_d \\ v_d \end{vmatrix}_e$$

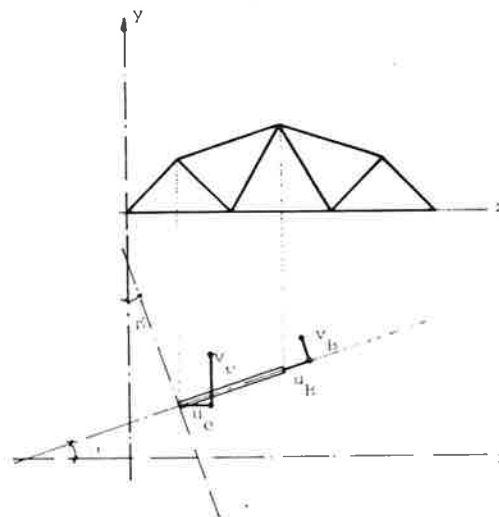
y siendo por tanto $\{T\}$ una matriz no necesariamente cuadrada.

** La energía de deformación para un movimiento infinitesimal es:

$$dU = d\{U\}^T \{F\}, \text{ por lo que}$$

$$U = \frac{1}{2} \{U\}^T \{F\} = \frac{1}{2} \{U\}^T \{J\} \{U\} \quad \{14.12\}$$

expresión independiente de los ejes elegidos.



PROCESO DEL ANALISIS MATRICIAL

- 0 : DESCOMPOSICION: 2 sistemas, con y sin movimientos nodales
- 1 : Descripción de Nudos, Barras
- 2 : Fuerzas nodales
- 3 : Matrices $\{J\}_B$ de barras (ejes propios)
- 4 : Ensamblaje $\{K\} = \sum_e \{T\}^T \{J\}_B \{T\}$
- 5 : Resolución
- 6 : Superposición 2 sistemas

14.3 CAMBIOS DE EJES BARRA-ESTRUCTURA

Hemos visto formas de la matriz de rigidez de una barra en ejes "propios": haciendo coincidir el eje OX con la recta que une sus extremos (izquierda-derecha). Sin embargo, éstos no suelen coincidir con los ejes generales de la estructura, que son los utilizados para su análisis.

Es elemental, sin embargo, el paso de unos a otros:

Sabemos que para una pieza aislada podemos escribir $\{F\}_B = \{J\}_B \{U\}_B$ {14.10} (fuerzas de extremo = rigidez · movimientos de extremo) expresado en ejes propios, es decir, tanto $\{F\}_B$ como $\{U\}_B$ representan componentes en ejes de barra.

Ahora bien, podemos igualmente construir $\{F\}_e = \{J\}_e \{U\}_e$, donde las componentes sean en los ejes generales de la estructura. *

En efecto, sabemos escribir:

$$\{U\}_B = \{T\}\{U\}_e \text{ y } \{F\}_B = \{T\}\{F\}_e \quad \{14.11\}$$

Si medimos la energía de deformación almacenada en una pieza que se halle en el estado definido por {14.10} obtenemos: **

$$U = \frac{1}{2} \{U\}_B^T \{J\}_B \{U\}_B = \frac{1}{2} \{U\}_e^T \{J\}_e \{U\}_e \quad \{14.12\}$$

de donde se deduce inmediatamente, a la vista de {14.11}:

$$\{J\}_e = \{T\}^T \{J\}_B \{T\} \quad \{14.13\}$$

Obtenidas las matrices de rigidez de barra en ejes de estructura, es inmediato el ensamblaje de la matriz de rigidez.

$$\{K\} = \sum_e \{J\}_e = \sum_e \{T\}^T \{J\}_B \{T\}$$

14.4 EJEMPLOS

14.4.1

Sea una estructura de nudos articulados con barras de igual material y sección. En ejes propios la matriz de rigidez de cada barra es

$$\{J\}_B = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En ejes de estructura es

$$\{J\}_e = \frac{EA}{l} \{T\}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{T\}, \text{ fácilmente calculable.}$$

El sistema global para la estructura es:

$\{F\} = \{K\}\{u\}$ que puede escribirse (haciendo constar los nodos)

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_1 \\ \{F\}_2 \\ \{F\}_3 \\ \{F\}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{K_{11}\} & \{K_{12}\} & \{K_{13}\} & \{K_{14}\} \\ \{K_{21}\} & \{K_{22}\} & \{K_{23}\} & \{K_{24}\} \\ \{K_{31}\} & \{K_{32}\} & \{K_{33}\} & \{K_{34}\} \\ \{K_{41}\} & \{K_{42}\} & \{K_{43}\} & \{K_{44}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_1 \\ \{U\}_2 \\ \{U\}_3 \\ \{U\}_4 \end{Bmatrix}$$

Ahora bien, $\{U\}_1$ y $\{U\}_2$ son movimientos de sustentaciones (conocidos), en este caso nulos, y $\{F\}_1$ y $\{F\}_2$ son las reacciones correspondientes.

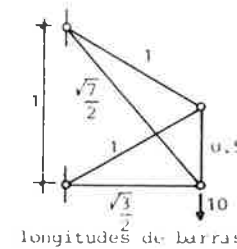
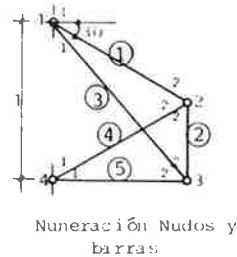
Si nos limitamos a escribir las ecuaciones para los nudos libres resulta (siendo $\{U\}_1 = \{U\}_4 = \{0\}$):

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_2 \\ \{F\}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{K_{22}\} & \{K_{23}\} \\ \{K_{32}\} & \{K_{33}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_1 \\ \{U\}_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\}_1 = \{K\}_1 \{U\}_1$$

que puede resolverse:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1.47 & -0.37 \\ -10 & 0 & -2 & -0.37 & 2.43 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.109 \\ -0.034 \\ -0.130 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos obtenidos permiten obtener los esfuerzos en las barras, al ser conocidos los movimientos de extremo de todas ellas, lo que se deja como ejercicio para el lector.



$\{T\}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{T\}$ puede obtenerse fácilmente;

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & -a^2 & -ab \\ ab & b^2 & -ab & -b^2 \\ -a^2 & -ab & a^2 & ab \\ -ab & -b^2 & ab & b^2 \end{bmatrix}$$

(basta calcular una submatriz de 2.2 que se repite)

De este modo puede establecerse el cuadro:

$$\text{ELEMENTO, } \{J\}_B, \{T\}, \{J\}_e = \begin{bmatrix} \{J_{11}\} & \{J_{12}\} \\ \{J_{21}\} & \{J_{22}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{J_{11}\} & \{-J_{11}\} \\ \{-J_{11}\} & \{J_{11}\} \end{bmatrix}_e$$

$$1, \quad EA \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.75 & -0.43 \\ -0.43 & 0.25 \end{bmatrix} EA$$

$$2, \quad 2EA \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} EA$$

$$3, \quad \frac{2EA}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{7} & -\frac{\sqrt{4}}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{7} & -\frac{\sqrt{4}}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.32 & -0.37 \\ -0.37 & 0.43 \end{bmatrix} EA$$

$$4, \quad EA \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.75 & 0.43 \\ 0.43 & 0.25 \end{bmatrix} EA$$

$$5, \quad \frac{2EA}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} EA$$

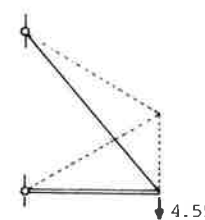
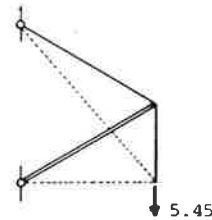
Para el ensamblaje obtenemos:

$$\{K_{22}\} = \{J_{22}^1\} + \{J_{22}^4\} + \{J_{22}^2\}$$

$$\{K_{23}\} = \{J_{21}^2\}$$

$$\{K_{33}\} = \{J_{11}^2\} + \{J_{22}^3\} + \{J_{22}^5\}$$

Los esfuerzos obtenidos pueden interpretarse según la figura:



* Obtención de descenso de extremo de la barra curva en ménsula. (fig. 4)

Para la carga de nieve q (por trabajos virtuales)

$$M_x = -q \frac{(x+1/2)^2}{2} \quad \text{Momento real}$$

$$\bar{C}_x = \frac{-V}{EI} (x+1/2) \quad (\text{siendo } V=1) \quad \text{Curvatura virtual}$$

$$v_q = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{q}{EI} (x+1/2)^2 ds, \text{ donde } x = 1/2(1-\cos\alpha) \\ ds = 1/2 d\alpha$$

y se integra α entre 0 y π .

$$v_q = \frac{5}{4} \frac{R^4}{EI} q \quad (\text{siendo } R=1/2)$$

Análogamente se obtienen el resto de los movimientos de extremo para las cargas q, M, H, V :

$$\begin{bmatrix} \theta_q \\ \delta_q \\ v_q \end{bmatrix} = \frac{q}{EI} \begin{bmatrix} \frac{3\pi}{4} R^3 \\ \frac{4}{3} R^4 \\ \frac{5\pi}{4} R^4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi R^2 & 2R^2 & \pi R^2 \\ 2R^2 & \frac{\pi R^3}{4} & 2R^3 \\ \pi R^2 & 2R^3 & \frac{3\pi R^3}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} M \\ H \\ V \end{bmatrix}$$

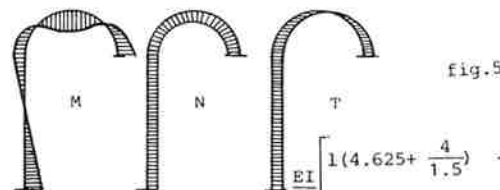
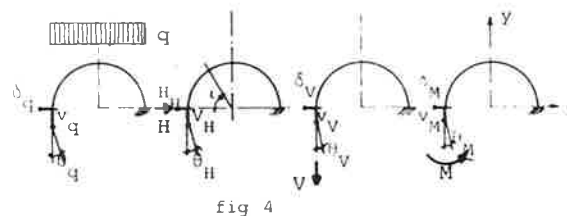
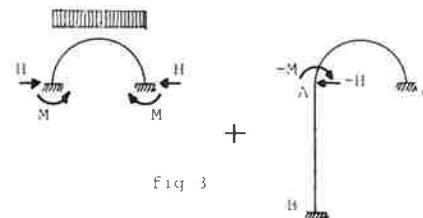
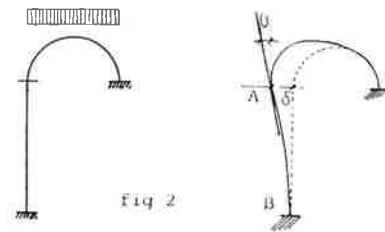
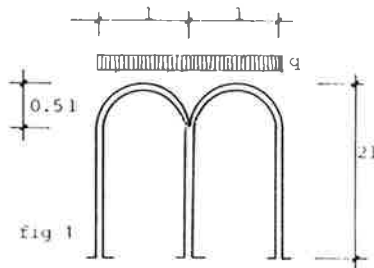
Invertiendo la matriz en la segunda ecuación:

$$\begin{bmatrix} M \\ H \\ V \end{bmatrix} = \frac{EI}{1^2} \begin{bmatrix} 4.6251 & -8.55 & -2.54 \\ -8.55 & \frac{26.88}{1} & 0 \\ -2.54 & 0 & \frac{5.09}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \\ v \end{bmatrix}$$

De modo que para anular los movimientos que provoca la carga q (θ_q, δ_q, v_q) se requieren (M, H, V) que provoquen ($-\theta_q, -\delta_q, -v_q$).

$$\begin{bmatrix} M \\ H \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0263 & 1 \\ 0.278 \\ -0.5 \end{bmatrix} q_l$$

Obsérvese que la matriz de la ecuación relaciona los movimientos en A con los esfuerzos requeridos en A sobre la barra curva, por lo que es la submatriz de rigidez J_{AA} de la barra, si su matriz completa expresa ($\{F\} = \{J\}\{u\}$)

$$\begin{bmatrix} \{F_A\} \\ \{F_C\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{J_{AA}\} & \{J_{AC}\} \\ \{J_{CA}\} & \{J_{CC}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_A\} \\ \{u_C\} \end{bmatrix}$$


14.42

Sea la estructura de nudos rígidos de la figura (sección cte.). Si no consideramos los acortamientos en barras, el problema se reduce al de la fig. 2, cuyo comportamiento puede describirse una vez conocidos los movimientos δ y θ de su deformada, considerando el punto A como nudo y las piezas recta BA y semicircunferencia AC como barras.

1: Llevar las cargas a los nudos exige descomponer el problema nuevamente en dos (fig. 3)

2: Las cargas sobre el nudo A se obtienen fácilmente considerando coacción total al movimiento en la barra curva.

En efecto, por el teorema de los trabajos virtuales pueden obtenerse todos los movimientos descritos en la fig. 4, y por tanto los valores de las reacciones precisas para anular todo movimiento de extremo. *

Estas son: $M = 0.0263ql^2$ $H = 0.278ql$

3: La construcción de las matrices de rigidez correspondientes a los movimientos aceptados del nudo A es elemental: para la barra recta se corresponde con la submatriz de flexión en el plano del pórtico; para la barra curva ha sido obtenida de hecho en el paso anterior.

4: De este modo el ensamblaje es inmediato. En la fig. 5 figura la matriz $\{K\}$, cuya obtención se deja como ejercicio.

5: La resolución del sistema resultante permite obtener los movimientos del nudo A, y por ende los esfuerzos derivados de dichos movimientos.

6: La superposición de los esfuerzos de los dos sistemas (fig. 3) resuelve el problema.

$$\frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 1(4.625 + \frac{4}{1.5}) & -8.55 + \frac{6}{1.5^2} \\ -8.55 + \frac{6}{1.5^2} & \frac{1}{L} \frac{26.88}{1.5} \end{bmatrix}$$

USO DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

15.1 MATRIZ DE ELEMENTO: FUNCIONES DE FORMA.

DETERMINACION DE LAS FUNCIONES DE FORMA.

Si para estado plano de tensión consideramos independientemente los movimientos horizontales y verticales, e interpolamos ambos componentes de la misma forma, podemos escribir :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(xy) & 0 & N_2(xy) & 0 & N_3(xy) & 0 & \dots \\ 0 & N_1(xy) & 0 & N_2(xy) & 0 & N_3(xy) & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (15.1)$$

$$\{u\} = \{N\}\{a\}$$

ver {13.3}

Las funciones N_i deben elegirse de forma que se anulen en todos los nodos salvo en el de su misma denominación para el que ha de adoptar valor unidad, al objeto de que 15.1 evalúe correctamente los movimientos de los nodos al usar como coordenadas (x,y) las de éstos.

Pueden verse representadas gráficamente algunas de dichas funciones.

* Veamos como pueden obtenerse.

Para n nodos : una función polinómica determinada con n condiciones exige n términos. Así pues :

$$\begin{bmatrix} 1 & n & \dots & n \\ N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & \dots & n \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & n \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

donde los coeficientes a_i, b_i, \dots (englobados en la matriz {Z}) han de asegurar los citados valores uno o cero en los nudos. Plantear esta condición para N_1 implica :

$$N_1 = 1 \text{ si } x_1, y_1$$

$$N_1 = 0 \text{ si } x_i, y_i \quad i \neq 1 \quad (i = n^{\text{a}} \text{ de nudo})$$

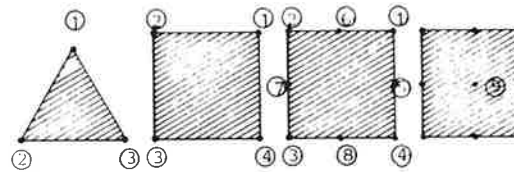
y para las n funciones :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 & \dots \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 & \dots \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3^2 & y_3^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

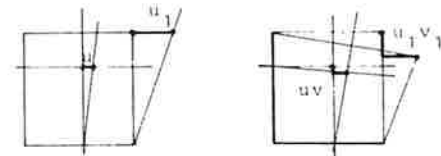
$$\{I\} = \{P\}\{Z\} \quad (15.3)$$

$$\{P\}^{-1}\{I\} = \{Z\}$$

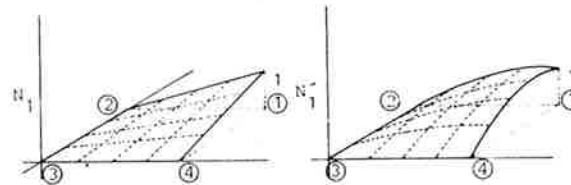
$$\{Z\} = \{P\}^{-1} \quad (15.4)$$



ELEMENTOS

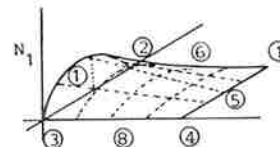
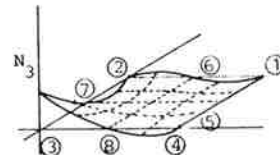


Interpolación a partir de movimientos nodales



Funciones de forma

Elemento cuadrado 4 nodos



Funciones de forma

Elemento cuadrado 8 nodos

Hemos visto en 13.2 una descripción general del método.

Como primera decisión se requería allí una definición de la aproximación a utilizar: tipo de elemento (o esquema de partición de la estructura), parámetros incógnita {a} y funciones {N} de interpolación de los movimientos {u} de todo punto del elemento.

Consideremos el análisis de un problema de estado plano de tensión (por ejemplo, una viga pared).

En la figura se ven algunos tipos de elementos posibles para los que los parámetros {a} serán los movimientos $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ de los nodos.

Elegido elemento y nodos (número y situación) debe describirse el movimiento de todo punto a partir del de los nodos (funciones {N} de interpolación, también conocidas como funciones de forma).

La interpolación ha de buscar una buena aproximación al movimiento real, por lo que debe hacerse mediante funciones que correspondan a los primeros términos del desarrollo en serie de las funciones (no conocidos) que describirían el movimiento real de los puntos del elemento. Suelen utilizarse preferentemente los términos del desarrollo polinómico, aunque pueden usarse otros tipos de desarrollo.

Elegido el tipo de las mismas {15.2}, éstas se obtienen estableciendo condiciones conocidas en los nodos 15.3 (o utilizando funciones de las que se conoce "a priori" que cumplen tales condiciones.*

Ver también Zienkiewicz (1980), cap.7

* Para el elemento de la figura las matrices $\{P\}$ y $\{Z\}$ son:

$$\{P\} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}; \{Z\} = \{P\}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1\sqrt{3}} & \frac{2}{1\sqrt{3}} & -\frac{1}{1\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

** De modo que por $\{15.2\}$ y $\{15.1\}$:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{x}{1} - \frac{y}{1\sqrt{3}} & 0 & \frac{2y}{1\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{x}{1} + \frac{y}{1\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{x}{1} - \frac{y}{1\sqrt{3}} & \frac{2y}{1\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{x}{1} + \frac{y}{1\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

Deformaciones

Tensiones

Movimientos

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}; \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}; \{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$\{\epsilon\}$ y $\{\sigma\}$ tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

por lo que son conocidas $\{\partial\}$ y $\{D\}$ y puede hallarse

$$\{B\} = \{\partial\}\{N\}$$

$$\{B\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1} & 0 & \frac{2}{1\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{1\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{1\sqrt{3}} & \frac{1}{1\sqrt{3}} & \frac{2}{1\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{1\sqrt{3}} & \frac{1}{1} \end{bmatrix}$$

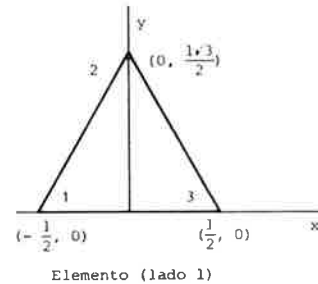
El cálculo de $\{J\}$ es trivial por $\{13.8\}$

$$\{J\} = Ee \begin{bmatrix} 1.225 & 0.361 & -0.25 & -0.289 & -0.875 & -0.072 \\ 0.708 & -0.433 & -0.667 & 0.072 & -0.042 & \\ 0.5 & 0 & -0.25 & 0.433 & & \\ 1.333 & 0.289 & -0.667 & & & \\ 1.125 & -0.361 & & & & \\ 0.708 & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Nodo 1} \\ \text{Nodo 2} \\ \text{Nodo 3} \end{matrix} \begin{matrix} H \\ V \\ H \\ V \\ H \\ V \end{matrix}$$

Simétrica

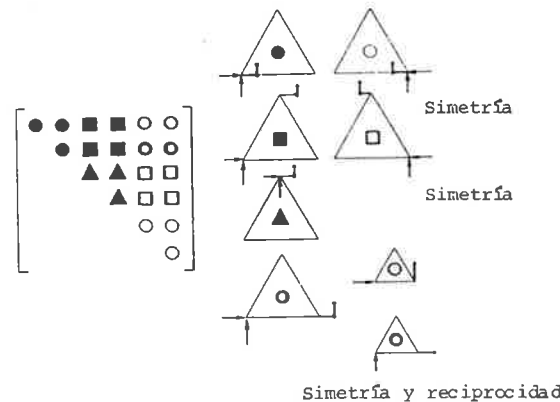
Nodo 1 Nodo 2 Nodo 3

u v u v u v



$$\begin{matrix} 1 \\ x & y \\ x^2 & xy & y^2 \\ x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{matrix}$$

TRIANGULO DE PASCAL



15.1.1 Ejemplo de elemento triangular.

Sea el sencillo elemento triangular de la figura. Al ser de tres nodos se necesitan tres funciones de forma polinómicas de tres términos.

En el triángulo de PASCAL se indican los términos elegidos (términos lineales).

Para construir las funciones de forma usando $\{15.2\}$ determinamos los coeficientes $\{Z\}$ mediante la expresión $\{15.4\}$ *

$$\{Z\} = \{P\}^{-1}$$

Las deformaciones, que para estado plano son los alargamientos unitarios y la distorsión angular, y las tensiones, normales y tangencial, pueden derivarse de los movimientos $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ mediante las expresiones:

$$\{\epsilon\} = \{\partial\}\{u\}$$

$$\{\sigma\} = \{D\}\{\epsilon\}$$

y puesto que podemos aproximar $\{u\}$, podemos igualmente aproximar $\{\epsilon\}$ y $\{\sigma\}$. **

$$\{u\} = \{N\}\{a\}$$

$$\{\epsilon\} = \{\partial\}\{N\}\{a\} = \{B\}\{a\}$$

$$\{\sigma\} = \{D\}\{B\}\{a\} \quad \{13.3\}$$

De este modo quedan obtenidos los términos precisos para la determinación de la matriz de rigidez del elemento. ***

$$\{J\} = \int_e \{B\}^T \{D\} \{B\} dv = \frac{1}{2} \frac{1\sqrt{3}}{2} e \{B\}^T \{D\} \{B\} \quad \{13.8\}$$

(Los valores indicados corresponden a $\nu = 0.25$)

En la figura se describen gráficamente los términos de la matriz (se ve que basta hallar solamente 13 términos de los 36 que componen la matriz).

* $\{J^1\} = \{J^3\} = \{J\}$ según 15.1.1

$\{J^2\} = \{T\}^T \{J\} \{T\}$

$\{T\} = \begin{Bmatrix} \{u\} \{0\} \{0\} \\ \{0\} \{u\} \{0\} \\ \{0\} \{0\} \{u\} \end{Bmatrix}$ siendo $\{u\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix}$

$\{u\} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}$

por lo tanto:

$\{T\} = \{T\}^T = -\{I\}$ y $\{J^2\} = \{J\}$

*** $\{K\} = \sum_e \{J\}$

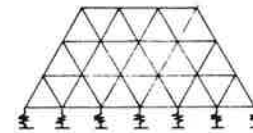
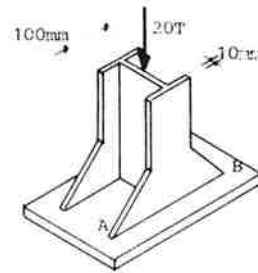
$\{K\} = \begin{Bmatrix} \{K_{11}\} \{K_{12}\} \{K_{13}\} \\ \{K_{21}\} \{K_{22}\} \{K_{23}\} \\ \{K_{31}\} \{K_{32}\} \{K_{33}\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{J_{22}^1\} + \{J_{33}^2\} \{J_{23}^1\} + \{J_{32}^2\} & \{J_{31}^2\} \\ \{J_{32}^1\} + \{J_{23}^2\} \{J_{33}^1\} + \{J_{22}^2\} + \{J_{11}^3\} \{J_{21}^2\} + \{J_{12}^3\} \\ \{J_{13}^2\} & \{J_{12}^2\} + \{J_{21}^3\} & \{J_{11}^2\} + \{J_{22}^3\} \end{Bmatrix}$

$\{K\} = \begin{Bmatrix} 1.625 & -0.361 & -0.5 & 0.722 & -0.875 & 0.072 \\ & 2.041 & 0.722 & -1.333 & -0.072 & -0.042 \\ & & 2.75 & 0 & -0.5 & -0.722 \\ & & & 2.75 & -0.722 & -1.333 \\ & & & & 1.625 & 0.361 \\ & & & & & 2.041 \end{Bmatrix} 484.96 \frac{T}{cm}$

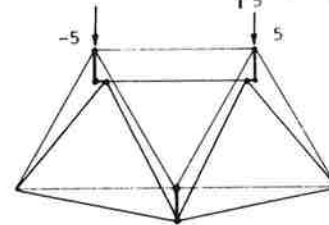
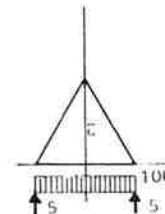
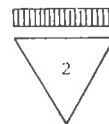
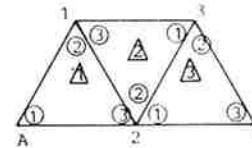
*** Para el elemento 2 tenemos:

$\{r_e\} = -\int_{-5}^5 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} - \frac{x}{l} - \frac{y}{l\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2y}{l\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{l} - \frac{y}{l\sqrt{3}} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{l\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{2y}{l\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{l} - \frac{y}{l\sqrt{3}} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} T$

Luego: $\{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix}$; $\{a\} = \{r\} \{K\}^{-1} = \begin{Bmatrix} 0.00318 \\ -0.01645 \\ 0 \\ -0.01761 \\ -0.00318 \\ -0.01645 \end{Bmatrix} cm$



$E = 21.10^4 T/m^2$
 $e = 0.5 cm$
 $l = 10 cm$
 $\nu = 0.25$



(1) Es básico para un buen análisis el correcto establecimiento de las condiciones de contorno. Aquí por simplicidad supondremos los puntos A y B fijos (los ejes se mueven en el descenso de AB) y los puntos 1, 2, 3 libres (prescindimos del "resorte" en 2).

15.12 Ejemplo de estructura.

Consideremos un apoyo de un soporte sobre cimentación, y supongamos que deseamos aproximar el estado de tensión de los elementos trapezoidales.

Dada la rigidez en su plano de la placa podemos suponer que los puntos A y B no se mueven horizontalmente y que la recta AB desciende deformándose según la figura.

Puede hacerse una descripción aproximada con el esquema de elementos de la fig. 3, pero para seguir el análisis manualmente usaremos menos elementos ⁽¹⁾ (fig. 4).

La matriz de rigidez de los elementos 1 y 3 es conocida; para el elemento 2 necesitamos establecer una rotación de 180° obteniéndose para dicho elemento, y con la numeración de nodos de la figura, la misma matriz de rigidez. *

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene de inmediato: basta recorrer la estructura elemento a elemento y acumular la rigidez de cada nodo de cada elemento en el nodo global al que concurre. **

Las fuerzas nodales exteriores se evalúan asimismo para cada elemento fácilmente mediante la expresión: $\{13.7\} \{F_e\} = \int_S \{N\}^T \{\tau_s\} ds$, pero pueden conocerse de inmediato sabiendo que han de ser estáticamente equivalentes a la acción, y considerando la simetría del problema. ***

Los movimientos nodales se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones:

$\{13.5\} \{r\} = \{K\} \{a\}$, y conocidos éstos pueden determinarse el resto de las incógnitas del problema. ****

Deformaciones y tensiones.

$$\{\epsilon\}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1} & 0 & \frac{2}{1\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{1\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{1\sqrt{3}} & -\frac{1}{1\sqrt{3}} & \frac{2}{1\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{1\sqrt{3}} & \frac{1}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0318 \\ -0.01645 \\ 0 \\ -0.01761 \end{bmatrix}, \text{ usando } \{B\} \text{ y } \{U\}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{x1} & \epsilon_{x2} \\ \epsilon_{y1} & \epsilon_{y2} \\ \epsilon_{xy1} & \epsilon_{xy2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.064 \\ -0.087 & 0.0125 \\ -0.139 & 0 \end{bmatrix} \text{ cm/m}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{x2} \\ \sigma_{y1} & \sigma_{y2} \\ \tau_{xy1} & \tau_{xy2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.487 & -1.352 \\ -1.949 & -0.076 \\ -1.172 & 0 \end{bmatrix} \text{ T/cm}^2$$

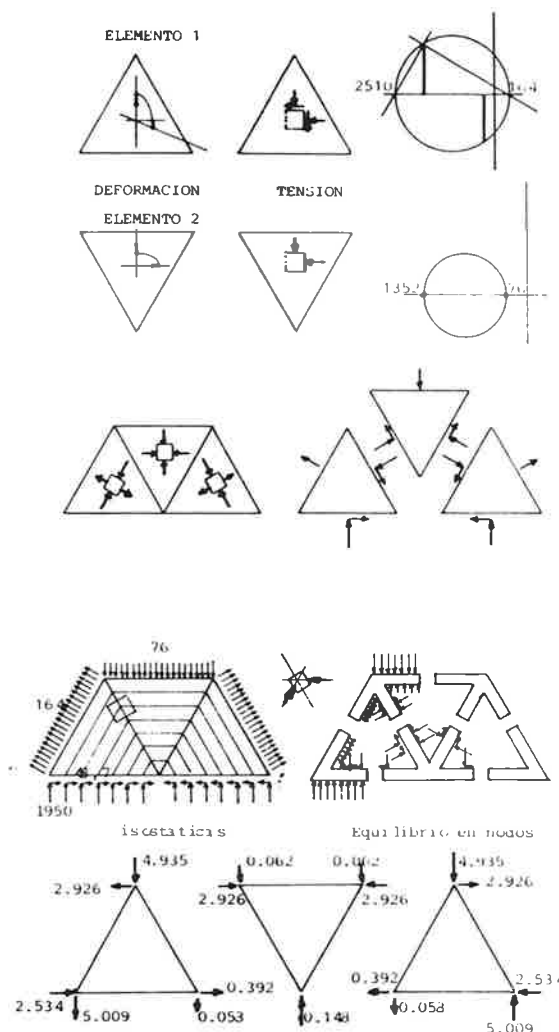
Fuerzas nodales.

Elemento 1.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ H_3 \\ V_3 \end{bmatrix} = \{J^1\} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0318 \\ -0.0165 \\ 0 \\ -0.0176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.534 \\ 5.009 \\ -2.926 \\ -4.935 \\ 0.392 \\ -0.058 \end{bmatrix}$$

Elemento 2.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ H_3 \\ V_3 \end{bmatrix} = \{J^2\} \begin{bmatrix} 0.00318 \\ 0.0165 \\ 0 \\ 0.0176 \\ -0.00318 \\ 0.0165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.926 \\ 0.062 \\ 0 \\ -0.148 \\ -2.926 \\ 0.062 \end{bmatrix}$$



En particular se obtienen de inmediato las deformaciones unitarias y las tensiones, elemento a elemento

$$\{\epsilon\} = \{B\} \{U\} ; \{\sigma\} = \{D\} \{\epsilon\}$$

Puesto que las funciones de forma $\{N\}$ que se han establecido interpolan aproximando sólo hasta el término lineal, sus derivadas $\{B\}$ que interpolan las deformaciones y tensiones sólo pueden describir estados constantes de tensión-deformación, que sólo cambian de elemento a elemento.

Dichas tensiones y deformaciones se mantienen en todo el volumen de cada elemento (pueden trazarse las líneas isostáticas en toda la estructura), y a la vez definen las tensiones en el contorno de los elementos.

Si analizamos el equilibrio de tensiones en el contorno, resulta que éste no se produce localmente ni en los bordes libres ni en el contorno entre elementos.

El equilibrio sólo se produce globalmente en los nodos, que acumulan la información de todas las zonas de contacto que confluyen en ellos: el punto teórico que es el nodo recoge información no sólo de ese punto sino de todo el área de influencia del mismo en el contorno del elemento. Así podemos interpretar las fuerzas nodales sobre cada elemento, que son fácilmente obtenibles.

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix}_{rs} = \{N\}_{(r,s=r_p s_p)} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{bmatrix}_{rs} \quad \text{ELEMENTO CANONICO}$$

$$\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix}_{xy} = \{N\}_{(r,s=r_p s_p)} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{bmatrix}_{xy} = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix}_{xy} \quad \text{ELEMENTO REAL}$$

$$\{u\}_{xy} = \{N\}_{rs} \{a\}_{xy} \quad (15.5)$$

Elegido un punto P en (rs) admitimos interpolar los movimientos de su correspondiente P' en (xy) del modo en que haríamos la interpolación en (rs) para el P.

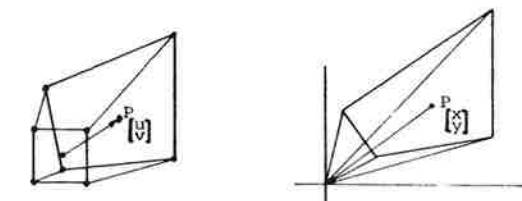
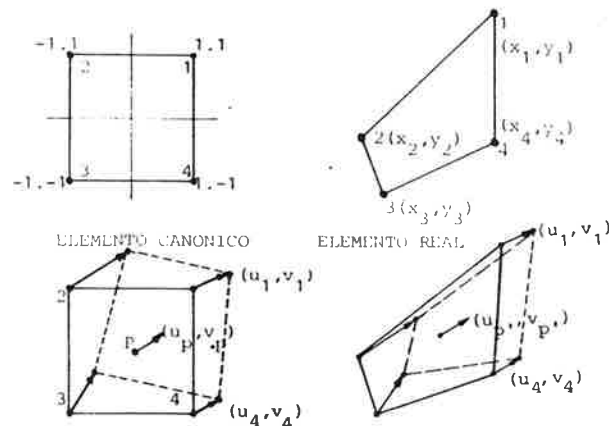
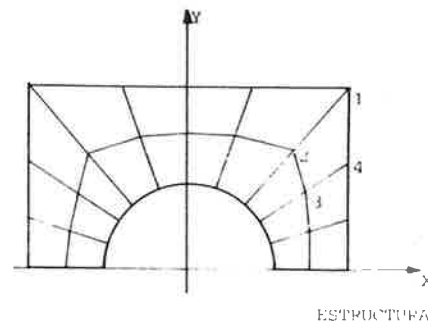
Los movimientos $\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix}$ en el espacio real (xy) son ahora función de las coordenadas (rs) de la imagen del punto en el elemento canónico y de los movimientos de los nodos en el elemento real.

** Conocido un punto P en el elemento canónico, las coordenadas del P' correspondiente en el elemento real se establecen "por interpolación".

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \{N\}_{(r,s=r_p s_p)} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (15.6)$$

En efecto, la correspondencia entre los nodos es inmediata, por lo que pueden considerarse las coordenadas del elemento real "interpoladas" a partir de las coordenadas de los nodos.

Por tratarse de una "interpolación" con igual número y situación de parámetros, los elementos generados por este procedimiento se denominan isoparamétricos. Es fácil comprender que bien podrían usarse descripciones paramétricas diferenciadas para movimientos y geometría.



{N} Interpola movimientos {N} Interpola geometría

15.2 ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS.

Hemos visto en el apartado anterior como pueden formularse con sencillez matrices de rigidez para elementos de formas regulares.

No es fácil en muchas ocasiones obtener particiones de la estructura mediante dichos tipos de elementos; es preciso pues construir elementos capaces de representar formas más irregulares.

El método consiste en apoyarse en formas sencillas y construir los elementos reales mediante cambios de coordenadas.

Llamaremos elemento canónico a un elemento cuadrado situado en un espacio de coordenadas (rs), - y vamos a construir la rigidez de todo elemento del espacio real (x,y) partiendo de dicho elemento, y realizando las transformaciones de coordenadas precisas.

Las funciones de forma {N} permiten obtener fácilmente en el espacio (rs) los movimientos $\begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix}$ de todo punto P a partir del de los nodos. *

Establecemos una correspondencia biunívoca entre los puntos de los elementos canónico y real y convenimos en asignar idéntico movimiento a los puntos que se corresponden en ambos elementos.

Para establecer la correspondencia entre ambos elementos adoptamos las mismas funciones de interpolación que para los movimientos.

$$\{u\}_{xy} = \{N\}_{rs} \{a\}_{xy} \quad \text{movimientos} \quad (15.5)$$

$$\{x\}_{xy} = \{N\}_{rs} \{X\}_{xy} \quad \text{coordenadas} \quad (15.6) \quad **$$

Descritos el elemento (real) y sus movimientos, veamos como construimos su matriz de rigidez, que permitirá posteriormente ensamblar la de la estructura y resolver los movimientos nodales.

$$* \{B\} = \{\partial\}\{N\} \quad \{13.3\}$$

$$\{\partial\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \{\partial\} \text{ es un operador diferencial en } (x,y) \text{ y } \{N\} \text{ est\u00e1 descrito en } (r,s).$$

$$\{N\} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+r)(1+s) & 0 & (1-r)(1+s) & 0 & (1-r)(1-s) & 0 & (1+s)(1-s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1+s) & 0 & (1-r)(1+s) & 0 & (1-r)(1-s) & 0 & (1+s)(1-s) \end{bmatrix}$$

Hemos de utilizar un mismo grupo de coordenadas.

Adoptamos por sencillez las (r,s) .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \delta \{V\}_{rs} = \{C\}\{V\}_{xy}$$

$$\text{por lo que } \{V\}_{xy} = \{C\}^{-1}\{V\}_{rs}$$

Es decir, podemos escribir el operador $\{\partial\}$ en t\u00e9rminos de (rs) sin m\u00e1s que conocer el inverso del Jacobiano $\{C\}$, que es calculable en todo punto puesto que son conocidas las coordenadas (xy) en funci\u00f3n de las (rs) ($\{15.6\}$).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & C_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{21}^{-1} & C_{22}^{-1} \\ C_{21}^{-1} & C_{22}^{-1} & C_{11}^{-1} & C_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

y por tanto:

$$\{B\} = \{\partial\}_{xy}\{N\} = \{H\}\{\partial\}_{rs}\{N\}_{rs} \quad \{15.7\}$$

Igualmente el \u00e1rea elemental recorrida en (xy) al recorrer $drds$ en (rs) puede calcularse en funci\u00f3n de (rs) al ser el m\u00f3dulo del producto vectorial $(\vec{dr} \cdot \vec{ds})_{xy}$:

$$dA = |\vec{dr} \times \vec{ds}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial r} dr & \frac{\partial y}{\partial r} dr & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial s} ds & \frac{\partial y}{\partial s} ds & 0 \end{vmatrix} = \{C\} drds \quad \{15.8\}$$

- que es conocido al conocerse el determinante del Jacobiano $\{C\}$.

15.2.1 Matriz de rigidez del elemento.

Hemos de realizar, en el espacio real, la integraci\u00f3n (num\u00e9rica) de la expresi\u00f3n $\{13.8\}$

$$\{J\} = \int_V \{B\}^T \{D\} \{B\} dv = \sum \alpha_i \{B\}_i^T \{D\} \{B\}_i \quad \{15.7\}$$

Para ello convendremos en recorrer el elemento seg\u00fan recorremos su imagen en (rs) . Hemos de establecer, pues, la forma del operador $\{\partial\}$ en (rs) y establecer el valor real en (xy) del t\u00e9rmino dv a partir del correspondiente t\u00e9rmino elemental en (rs) . *

De este modo:

$$\{B\} = \{H\}\{\partial\}_{rs}\{N\}_{rs} = \{H\}\{G\} \quad \{15.7\}$$

$$dA = \{C\} dr ds \quad \{15.8\}$$

y por lo tanto:

$$\{J\} = \sum e_i \alpha_i \{G_i\}^T \{H_i\}^T \{D\} \{H_i\} \{G_i\} \{C_i\} \quad \{15.9\}$$

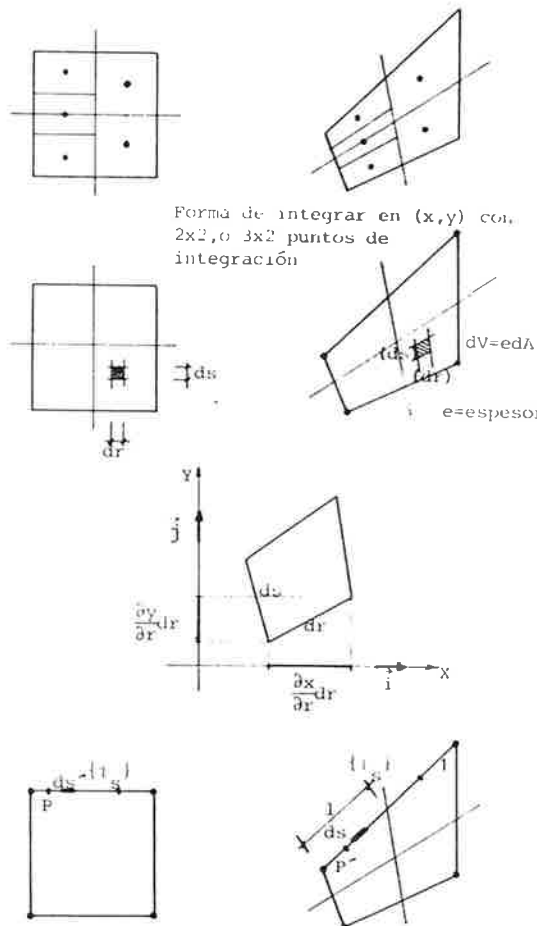
y puede hacerse la integraci\u00f3n num\u00e9rica mediante los puntos gaussianos del elemento can\u00f3nico.

Puede verse, pues, la facilidad con que puede establecerse un programa de ordenador que construye la rigidez de todo elemento sin m\u00e1s que ejecutar la operaci\u00f3n $\{15.9\}$.

An\u00e1logamente puede establecerse el c\u00e1lculo de las fuerzas nodales en el contorno ($\{13.7\}$) calculando la integral al recorrer el contorno del elemento can\u00f3nico.

$$\{r\} = \int_{ds} \{N\}^T \{\tau_s\} ds = \sum e \{N_p\}^T \{\tau_p\} l_p$$

siendo P los puntos de integraci\u00f3n.



* Funciones serendípitas:

$$N_1 = \frac{(1+x)(1+y)}{4} \dots$$

$$N_4 = \frac{(1+x)(1-y)}{4} \dots$$

De modo general para los vértices:

$$N_i = \frac{(1+xx_i)(1+yy_i)}{4} \quad i=1..4$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1-x^2)(1+yy_i) \text{ para } x_i=0 \quad (i=6,8)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1-y^2)(1+xx_i) \text{ para } y_i=0 \quad (i=5,7) \text{ etc...}$$

** Funciones lagrangianas:

$$N_{ij} = l_i^n(x) l_j^m(y)$$

$$\text{siendo } l_i^n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

*** Para las funciones serendípitas tenemos:

$$\{u\} = \{N\}\{a\} \text{ siendo } \{N\} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+x)(1+y) & 0 & (1-x)(1+y) & \dots \\ 0 & (1+x)(1+y) & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$y \{B\} = \{D\}\{N\} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+y & 0 & -1-y & 0 & -1+y & 0 & 1-y & 0 \\ 0 & 1+x & 0 & 1-x & 0 & -1+x & 0 & -1-x \\ 1+x & 1+y & 1-x & -1-y & -1+x & -1+y & -1-x & 1-y \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\{J\} = \int_v dv \{B\}^T \{D\} \{B\} = \frac{E}{16(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \int ((1+y)^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+x^2)) dx dy & \dots \\ \int \frac{(1+\nu)}{2} (1+x)(1+y) dx dy & \dots \\ \int (-1+y)^2 + \frac{1-\nu}{2}(1-x^2) dx dy & \dots \end{bmatrix}$$

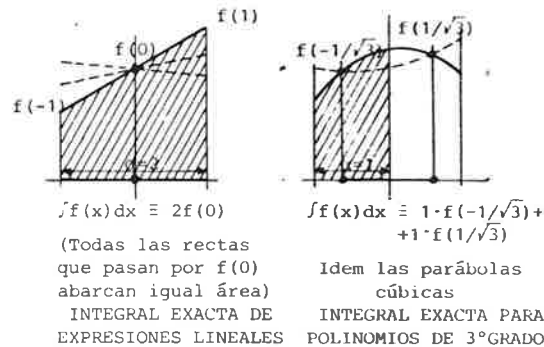
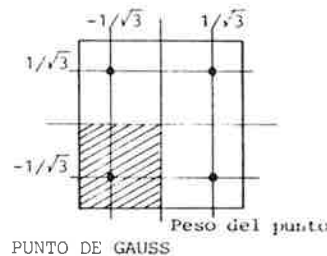
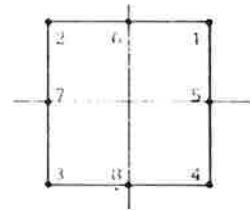
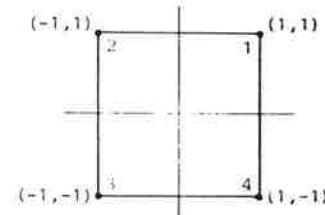
$$\text{Podemos llamar } C = \frac{E}{16(1-\nu^2)}$$

Por integración numérica con 2 puntos por coordenada tenemos, por ejemplo, para K_{11} :

$$K_{11} = C \sum \alpha_i f_i = C \sum \alpha_i ((1+y_i)^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+x_i^2)) = 2C (1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1-\nu}{2} (1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}})) = C (\frac{16}{3} + (1-\nu) \frac{8}{3})$$

Idéntico al obtenido por integración algebraica.

$$K_{11} = C \int ((1+y)^2 + \frac{1-\nu}{2}(1+x)^2) dx dy = C \int \left[\frac{(1+y)^3}{3} + \frac{1-\nu}{2}(1+x)^2 y \right]_{-1}^1 dx$$



15.22 Elemento de 4 nodos: funciones de forma serendípitas y lagrangianas.

Hemos visto un método para hallar funciones de forma que aún siendo general, es susceptible de presentar problemas numéricos ($\{P\}$ singular), y en todo caso, es costoso en cálculo ($\{P\}^{-1}$).

Otro medio es elegir funciones en las que sea fácil comprobar que cumplen las condiciones en los nodos.

Dos familias clásicas de dichas funciones son la SERENDIPITA* y la LAGRANGIANA**, que son fáciles de establecer para los elementos cuadrados de la figura (otros elementos pueden transformarse en éstos por transformación de coordenadas o cambios de escala).

Por lo tanto es relativamente fácil establecer las correspondientes matrices de rigidez.

En efecto, al igual que para el elemento triangular quedan determinados:

- $\{N\}$ (interpolación de movimientos)
- $\{B\}$ (interpolación de deformaciones)
- $\{J\}$ (matriz de rigidez del elemento)***

Sin embargo, es fácil vislumbrar la creciente complejidad de la integración precisa para la obtención de $\{J\}$, por lo que, usualmente, se recurre a procedimientos de integración numérica, de los que el más usado es el de los puntos de Gauss.

La integración numérica por Gauss consiste en transformar la integral en suma; $\int f(x) dx = \sum \alpha_i f(i)$, eligiendo cuidadosamente tanto los puntos i como los pesos α_i de modo a minimizar el número de operaciones a realizar.****

Existen tablas de puntos y pesos de Gauss para la integración de polinomios de diversos grados.

* CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

La discretización es convergente si:

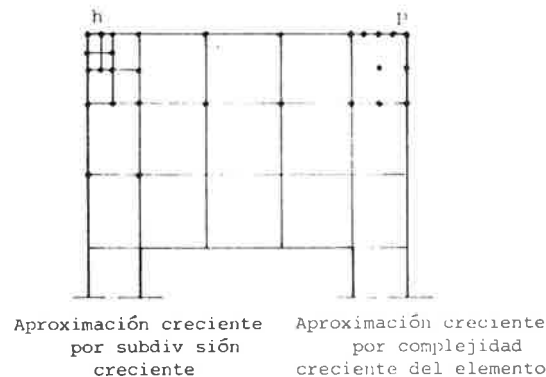
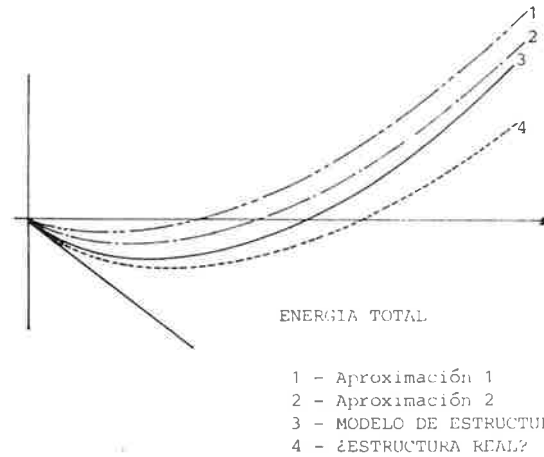
- 1) Es capaz de representar movimientos rígidos del elemento (sin deformación).
- 2) Es capaz de representar todos los estados de deformación constante posibles en el elemento (esto incluye el criterio anterior).
- 3) Para todo conjunto de elementos contiguos que se hallen simultáneamente en el mismo estado de deformación constante existe continuidad en los desplazamientos, tanto en el interior de los elementos como a través de las superficies de contacto entre los mismos (criterio de la parcela).

Podemos sustituir el criterio 3) por el más restrictivo 3 bis):

- 3 bis) Existe continuidad en los desplazamientos tanto en el interior del elemento como a través de las superficies de contacto entre los mismos.

En este caso la convergencia es MONOTONA.

Una demostración rigurosa de las anteriores afirmaciones excede los objetivos de este texto, por lo que el lector interesado en éllo debe remitirse a la bibliografía



15.3 CONVERGENCIA.

En el camino destinado a establecer una solución aproximada al comportamiento de una estructura completa se han realizado dos reducciones:

Una al establecer un modelo de comportamiento para ésta susceptible de ser tratado matemáticamente (p.e.: material elástico,...).

Dos, al discretizar el modelo de la estructura para representar su comportamiento a partir de un número limitado de parámetros.

Se habla de convergencia del método de los elementos finitos si las soluciones de la discretización pueden aproximarse tanto como se quiera a las del modelo matemático que se representa.

A la izquierda se enumeran los criterios de convergencia establecidos para el método. *

Pueden lograrse aproximaciones crecientes para un problema dado,

1) bien disminuyendo el tamaño del elemento y aumentando el número de éstos (disminución de h = dimensión típica)

2) bien aumentando el número de parámetros por elemento, añadiendo términos adicionales al desarrollo (añadiendo nodos o términos anodales) (aumento de p = grado del polinomio)

Hablar de la precisión de los resultados exige además estudiar detenidamente los importantes problemas derivados de la limitación en la precisión numérica de las operaciones en ordenador y de los errores de redondeo asociados a éstas. Nos limitamos aquí a hacer constar el problema, que trata detalladamente Deif en su "Advanced matrix theory for scientists and engineers" 1982.

BIBLIOGRAFIA BASICA.

No es el objetivo de este texto ofrecer una amplia bibliografía sobre los temas abordados: ésta podría ser tan extensa como el mismo texto, y éste no pretende ser más que un cabo del hilo que lleva a la madeja de la teoría de la elasticidad y sus aplicaciones.

Se remite al lector a unos pocos textos básicos a través de los cuales pueda progresar en el devanado de éste.

ELASTICIDAD TEORICA

Antonio García de Arango 1964

TEORIA DE LA ELASTICIDAD

Timoshenko 1968

ADVANCED STRENGTH AND APPLIED ELASTICITY

A.C.Ugural & S.K.Fenster 1981

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

O.C.Zienkiewicz 1980

FINITE ELEMENT PROCEDURES IN ENGINEERING ANALYSIS

Klaus-Juergen Bathe 1982